PROBLEMAS DE GEOMETRÍA

Volumen 2

Gerard Romo Garrido



Toomates Cool·lección

Los documentos de **Toomates Cool·lección** son recopilaciones de materiales matemáticos, redactados, ordenados y sistematizados por **Gerard Romo**, con el objetivo de que puedan ser útiles para cualquier estudiante de matemáticas.

"**Always Under Construction**": Debido a lo ambicioso del proyecto, estos documentos se van ampliando, corrigiendo y completando a lo largo de los años.

Se agradecerá cualquier observación, comentario, rectificación o colaboración a

toomates@gmail.com

Todos los documentos se ofrecen en dos versiones: En formato "**pdf**" para una cómoda lectura y en el formato "**doc**" de MSWord para permitir y facilitar su edición.

Actualmente **Toomates Cool·lección** consta de los siguientes documentos:

Geometría axiomática:

Geometría Axiomática	pdf	doc1 2 3 4 5 6 7 ... 19 20 21 portada
Problemas de Geometría (Vol. 1)	pdf	doc
Problemas de Geometría (Vol. 2)	pdf	doc
Problemas de Geometría (Vol. 3)	pdf	doc

Matemáticas para el bachillerato (en catalán):

Àlgebra Lineal Batxillerat	pdf	doc
Geometria Lineal Batxillerat	pdf	doc
Càlcul Infinitesimal Batxillerat	pdf	doc1 2
Programació Lineal Batxillerat	pdf	doc

Problemarios:

Problemas de Matemáticas (Vol. 1)	pdf	doc
Cangur Integral (en catalán)	pdf	doc

Versión de este documento: 05/09/2018

www.toomates.net

Índice.

Este volumen se completa con una lista de 35 ejercicios de geometría proyectiva analítica, numerados del 23 al 57.

Accede a
www.toomates.net/biblioteca/GeometriaAxiomatica.pdf

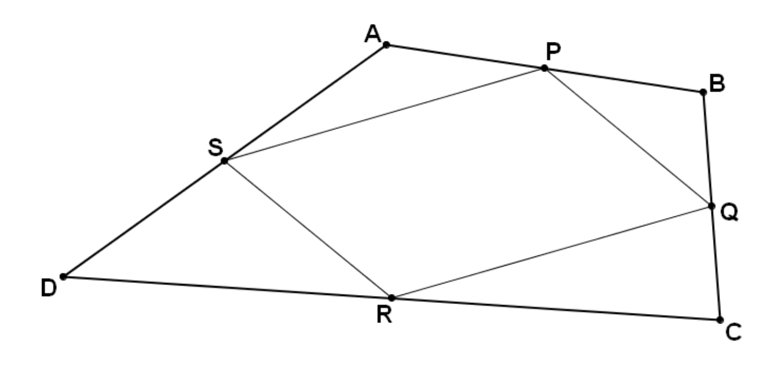
para descargar gratuitamente el libro de teoría que complementa este problemario.

Accede a
www.toomates.net/biblioteca/ProblemasGeometria1.pdf

para descargar gratuitamente el primer volumen de este problemario, con 40 problemas.

1. Área del paralelogramo de Varignon.

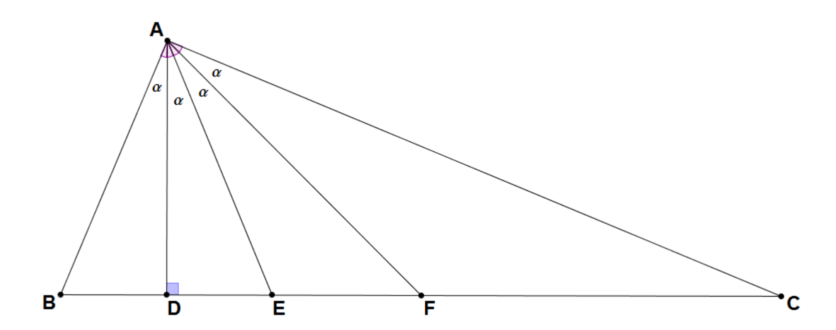
Demuestra que el área del **paralelogramo de Varignon** asociado a un cuadrilátero (el paralelogramo que se genera al unir los puntos medios de cada lado) es la mitad del área de dicho cuadrilátero.



$$[\Delta SPQR] = \frac{1}{2}[\Delta ABCD]$$

2. Altura, bisectriz y mediana formando cuatro ángulos iguales.

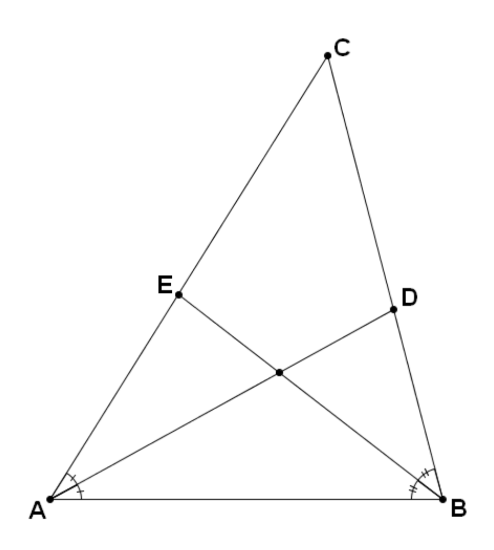
Determina las condiciones que debe cumplir un triángulo ΔABC para que la altura AH, la bisectriz AS y la mediana AF determinen cuatro ángulos iguales.



3. Razón con bisectrices (AMC 12A 2016 #12).

En el triángulo ΔABC, AB=6, BC=7 y CA=8. El punto D está en $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ es la bisectriz de $\angle BAC$. El punto E está en $\overline{AC}$ y $\overline{BE}$ es la bisectriz de $\angle ABC$. Las bisectrices se cortan en el punto F. Determina la razón $AF:FD$.

A) 3:2 B) 5:3 C) 2:1 D) 7:3 E) 5:2

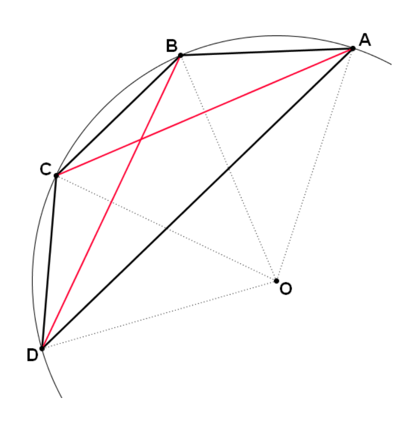


AMC 12A 2016 #12

4. Cuadrilátero con tres lados iguales.

Un cuadrilátero está inscrito en una circunferencia de radio $200\sqrt{2}$. Tres de los lados miden 200. ¿Cuanto mide el cuarto lado?

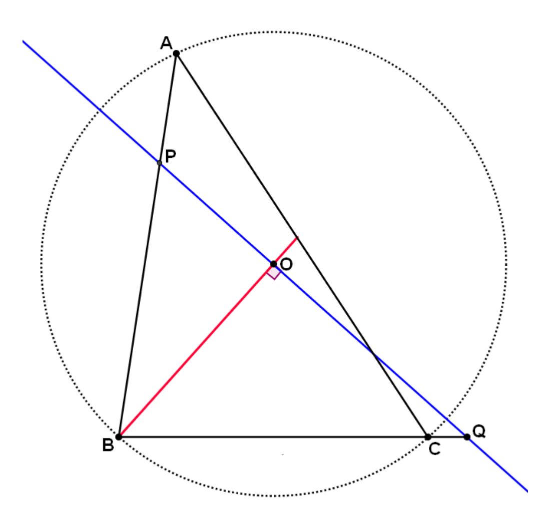
A) 200 B) $200\sqrt{2}$ C) $200\sqrt{3}$ D) $300\sqrt{2}$ E) 500



AMC 12A 2016 #21

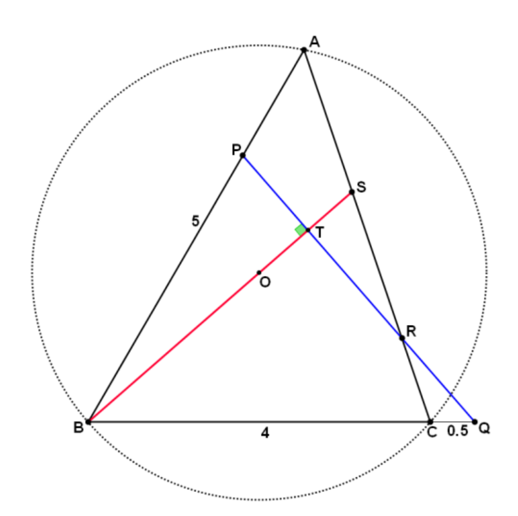
5. Rectas perpendiculares y circuncentro.

La circunferencia circunscrita al triángulo ΔABC tiene centro O. La recta que pasa por O perpendicular a OB corta las rectas AB y BC en P y Q respectivamente. Se sabe que AB=5, BC=4 y BQ=4.5. Si BP=m/n con m y n coprimos y positivos, encontrar m+n.



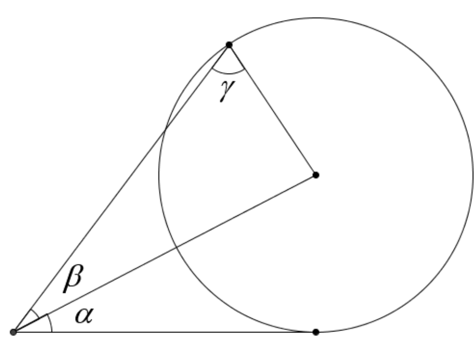
AIME II 2015 #11

Nota: Este problema se puede ampliar para rectas PQ con $PQ \perp OB$ que no necesariamente pasen por el circuncentro O. La distancia BP de la recta que tomemos.



6. Relación trigonométrica con cuerda y tangente en una circunferencia.

Sea una circunferencia con centro C y tres ángulos α , β y γ tal y como se indica en la figura:



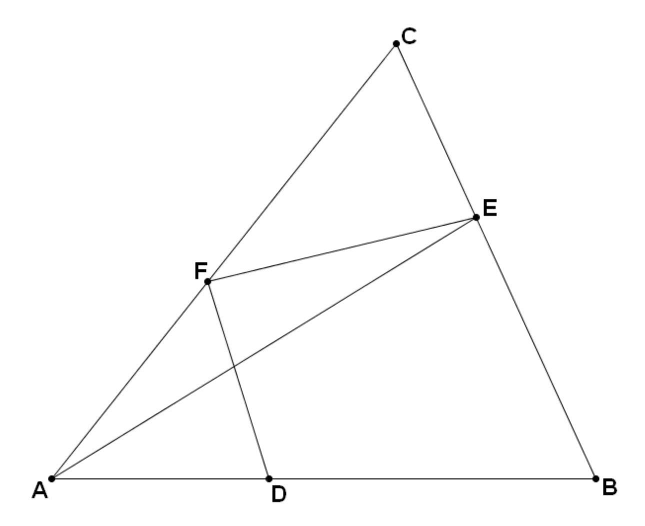
Los ángulos α , β y γ están relacionados por la ecuación:

(a) $\cos\alpha = \sin(\beta + \gamma)$
(b) $\sin\beta = \sin\alpha \sin\gamma$
(c) $\sin\beta(1 - \cos\alpha) = \sin\gamma$
(d) $\sin(\alpha + \beta) = \cos\gamma \sin\alpha$

Fuente: Examen de ingreso en la Universidad de Oxford.

7. Dos áreas iguales en el interior de un triángulo.

En el triángulo ΔABC de área 10 situamos los puntos D, E y F respectivamente en los lados AB, BC y AC, de forma que $AD = 2$, $DB = 3$ y la área del triángulo ΔABE es igual a la área del cuadrilátero $\Diamond DBEF$. Determina dicha área.

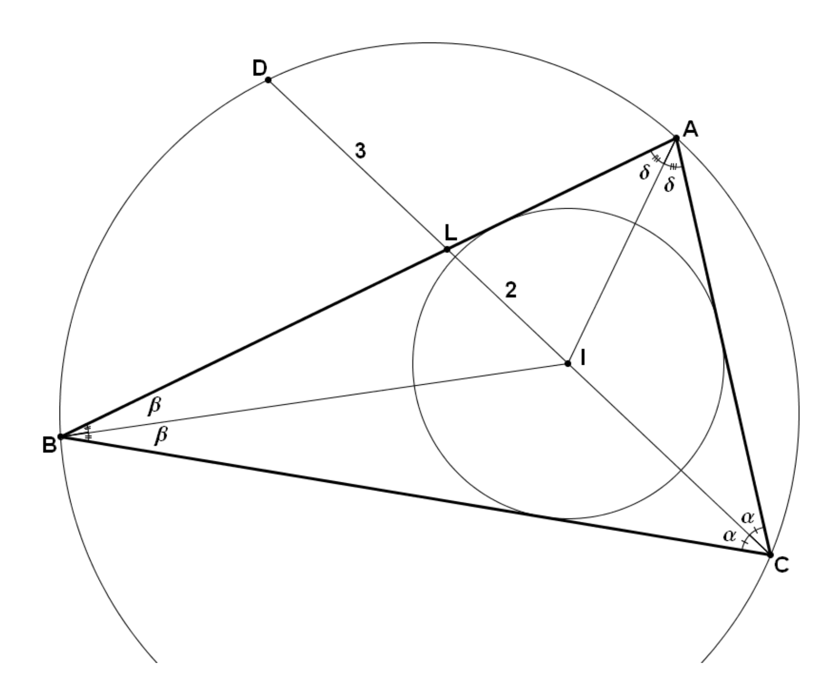


Del XXIII Concurso "Puig Adam" de Resolución de Problemas. Segundo Nivel, Problema 2.

Fuente: http://www.matematicasjmmm.com/new-blog-1/2018/1/21/geometra-128-tringulos

8. Segmento en triángulo con incentro y circunferencia circunscrita.

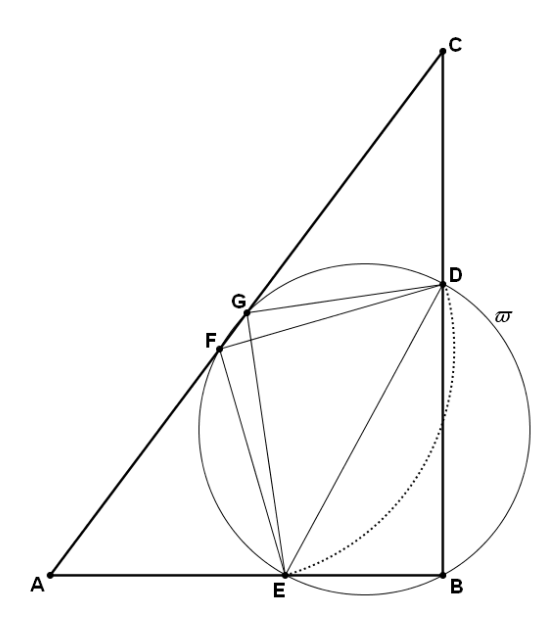
Sea I el incentro del triángulo ΔABC, y supongamos que la bisectriz de $\angle ACB$ corta $\overline{AB}$ en L. La recta por C y L corta la circunferencia circunscrita de ΔABC en los puntos C y D. Si $LI = 2$ y $LD = 3$, entonces $IC = \frac{p}{q}$, donde p y q son enteros positivos coprimos. Encontrar $p + q$.



AIME I 2016 #6

9. Segmento con circunferencia y triángulo rectángulo.

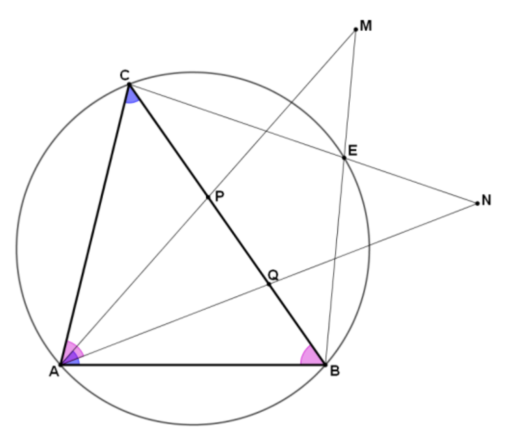
En el triángulo ΔABC, $AB=3$, $BC=4$ y $AC=5$. La circunferencia ϖ corta $\overline{AB}$ en E y B, $\overline{BC}$ en B y D, y $\overline{AC}$ en F y G. Suponiendo que $EF=DF$ y $\frac{DG}{EG}=\frac{3}{4}$, la longitud $DE=\frac{a\sqrt{b}}{c}$ con a y c son enteros positivos coprimos, y b es un entero positivo no divisible por la raíz de ningún primo. Encontrar $a+b+c$.



AIME I 2014 Problema 15

10. Cuadrilátero cíclico con ángulos y puntos simétricos.

Sean P y Q dos puntos del segmento BC de un triángulo agudo ΔABC tales que $\angle PAB = \angle BCA$ y $\angle CAQ = \angle ABC$. Sean M y N los puntos de AP y AQ, respectivamente, tales que P es el punto medio de AM y Q es el punto medio de AN. Demostrar que la intersección de BM y CN pertenece a la circunferencia del triángulo ΔABC.

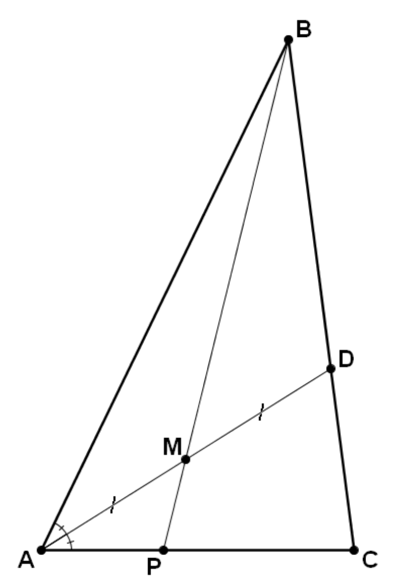


IMO 2014 #4

Fuente: https://artofproblemsolving.com/community/c6t32014f6h597090_imo_2014_problem_4

11. Razón en triángulo con bisectriz y punto medio.

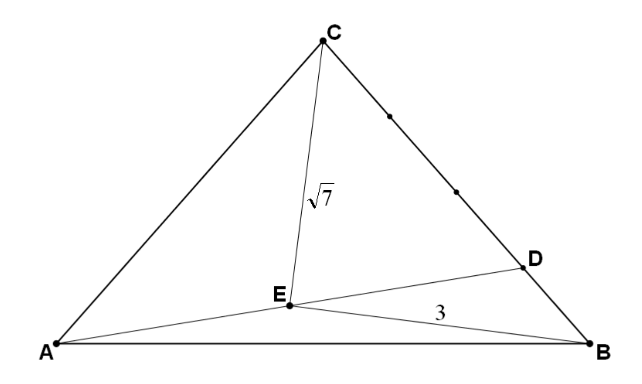
En un triángulo ΔABC, $AB = \frac{20}{11} AC$. La bisectriz de $\angle A$ corta BC en D, y el punto M es el punto medio de AD. Sea P el punto de corte entre AC y BM. La razón CP a PA se puede expresar de la forma m/n, con m y n enteros positivos coprimos. Encontrar $m+n$.



AIME II 2011 #4

12. Área de triángulo con razón y punto medio.

En el triángulo ΔABC, $AC = BC$, un punto D está en $\overline{BC}$ tal que $CD = 3 \cdot DB$. Sea E el punto medio de $\overline{AD}$. Suponiendo que $CE = \sqrt{7}$ y $BE = 3$, el área de ΔABC se puede representar de la forma $m\sqrt{n}$, con m y n enteros positivos y n no es divisible por el cuadrado de ningún número primo. Encontrar $m+n$.

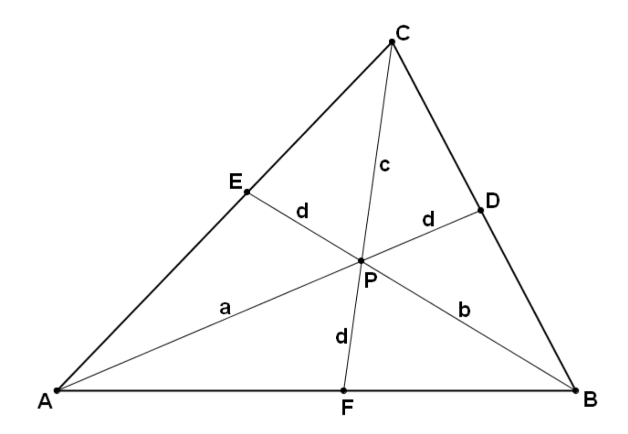


AIME II 2013 #13

Fuente: https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php?title=2013_AIME_II_Problems/Problem_13

13. Producto de tres cevianas sabiendo su suma.

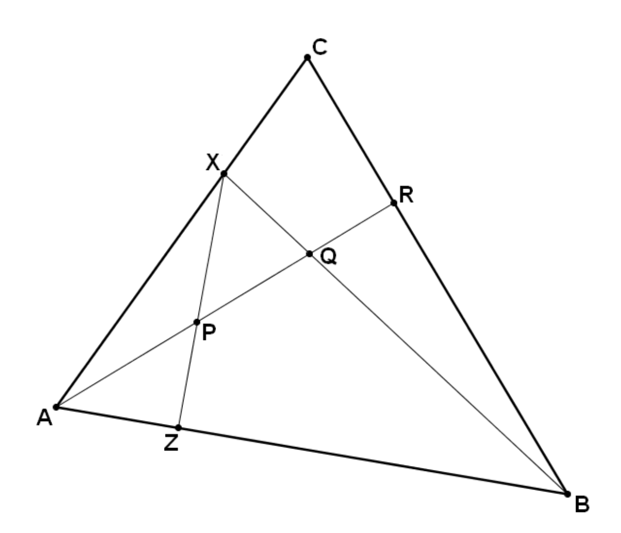
Sea P un punto en el interior del triángulo ΔABC, y extendemos las rectas desde cada vértice al lado opuesto por el punto P. Sean a, b, c y d las distancias de los segmentos indicados en la figura. Encontrar el producto abc si $a+b+c=43$ y $d=3$.



AIME 1988 #12

14. Razón de segmentos en un triángulo.

En el triángulo ΔABC, trazamos una ceviana AR cumpliendo $BR:RC=2:1$, y dos puntos P y Q en el segmento $\overline{AR}$ de forma que $AP:PQ:QR=5:4:3$. La recta BQ cortará AC en X y la recta XP cortará AB en Z. Determinar $AZ:ZB$.



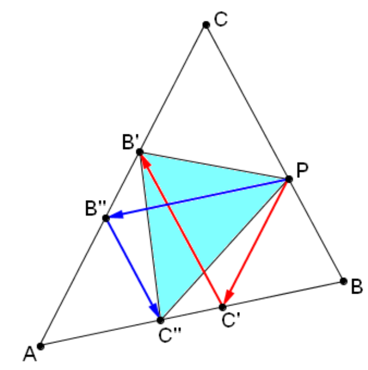
15. Cinco ejercicios de coordenadas baricéntricas.

a) Dados los puntos $A=(3,3)$ y $B=(6,12)$ que determinan el segmento $\overline{AB}$, determinar las coordenadas de los puntos M y N que dividen al segmento $\overline{AB}$ en tres partes iguales.

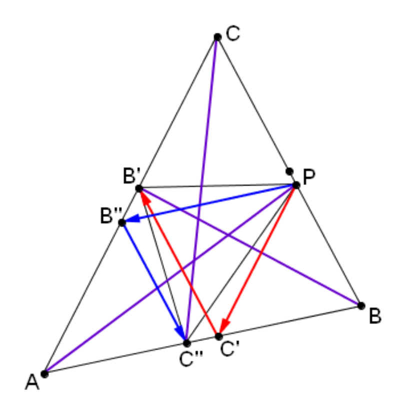
b) Los puntos $A=(1,0)$, $B=(0,1)$ y $C=(0,0)$ son vértices de un paralelogramo. Encontrar las coordenadas del vértice D.

c) En un triángulo ABC el baricentro es $G=(1,2)$. El punto medio de BC es $M=(2,4)$ y el punto medio de AC es $N=(3,-2)$. Se pide encontrar las coordenadas de los vértices A, B y C.

d) Sea un triángulo ABC. Sea P un punto sobre el lado BC. Sea C' el punto de intersección de AB con la recta que pasa por P y es paralela a AC. Sea B' el punto de intersección de AC con la recta que pasa por C' y es paralela a BC.
Sea B'' el punto de intersección de AC con la recta que pasa por P y es paralela a AB, y C'' el punto de intersección de AB y la recta que pasa por B'' y es paralela a BC.



i) Demostrar que los triángulo ABC y PB'C'' tienen el mismo baricentro.
ii) Demostrar que si P lo tomamos en el punto medio de BC, entonces las rectas AP, BB' y CC'' son concurrentes.
iii) Demostrar que si las rectas AP, BB' y CC'' son concurrentes, entonces P coincide con el punto medio de BC.



e) Demostrar que el segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado.

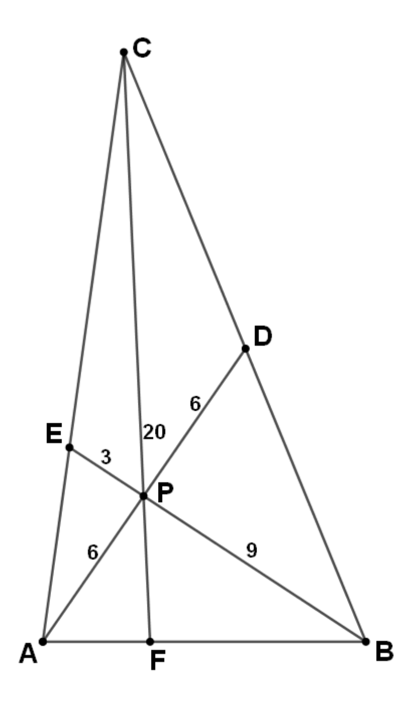
16. Área de un triángulo inscrito en otro.

En el triángulo ΔABC, $AB = 13$, $BC = 15$ y $CA = 17$. Sean los puntos D en $\overline{AB}$, E en $\overline{BC}$ y F en $\overline{CA}$. Sea $AD = p \cdot AB$, $BE = q \cdot BC$ y $CF = r \cdot CA$, donde p, q y r son positivos y satisfacen $p + q + r = 2/3$ y $p^2 + q^2 + r^2 = 2/5$. La razón entre el área del triángulo ΔDEF y el área del triángulo ΔABC se puede escribir de la forma m/n, donde m y n son enteros positivos coprimos. Determinar $m + n$.

AIME I 2001 #9

17. Área de un triángulo dado un punto interior y cevianas.

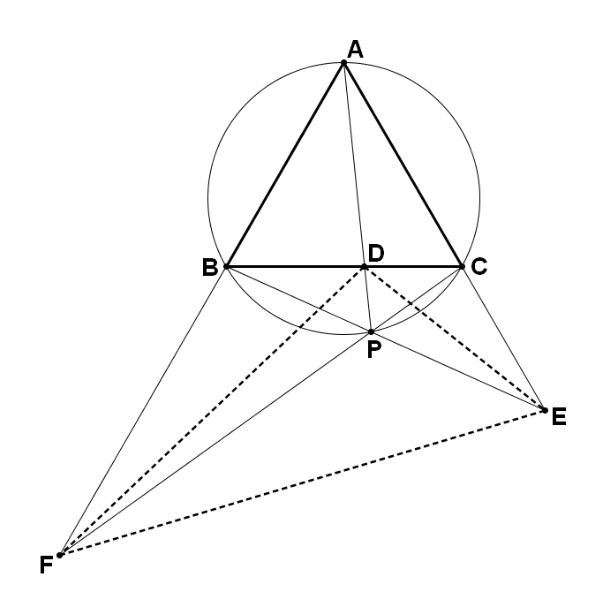
Un punto P está situado en el interior de un triángulo ΔABC. Trazamos los segmentos APD, BPE y CPF con D en BC, E en AC y F en AB. Suponiendo que $AP = 6$, $BP = 9$, $PE = 3$ y $CF = 20$, determina el área de ΔABC.



AIME 1989 #15

18. Área de triángulo con punto en circunferencia circunscrita.

Sea ΔABC un triángulo equilátero y sea P un punto de su circuncentro. Las rectas PA y BC se cortan en D, las rectas PB y CA se cortan en E y las rectas PC y AB se cortan en F. Demostrar que el área del triángulo ΔDEF es el doble del área del triángulo ΔABC .

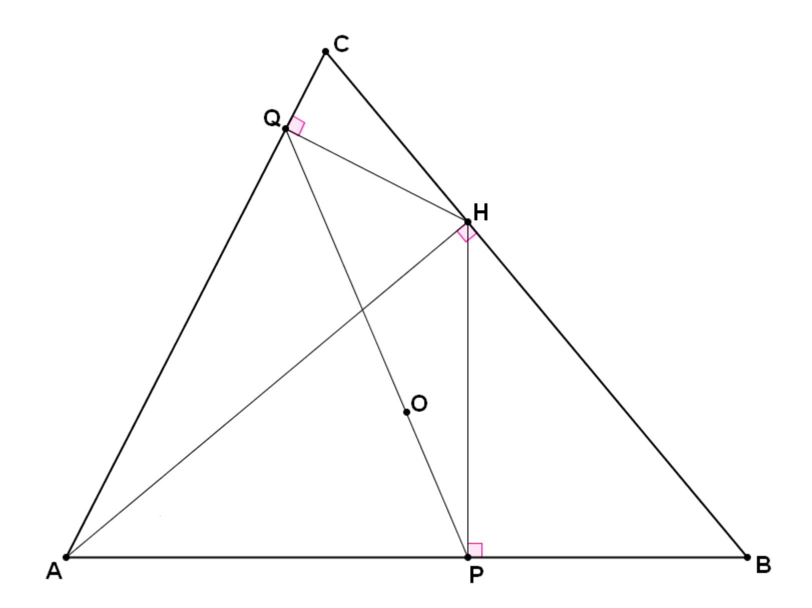


19. Puntos alineados en triángulo con circuncentro y alturas.

Sea ΔABC un triángulo agudo y O su circuncentro. Sea H el pie de la perpendicular a $\overleftrightarrow{BC}$ por A, y sean P y Q los pies de las perpendiculares por H a $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{AC}$ respectivamente. Demostrar que si se cumple

$$AH^2 = 2 \cdot AO^2$$

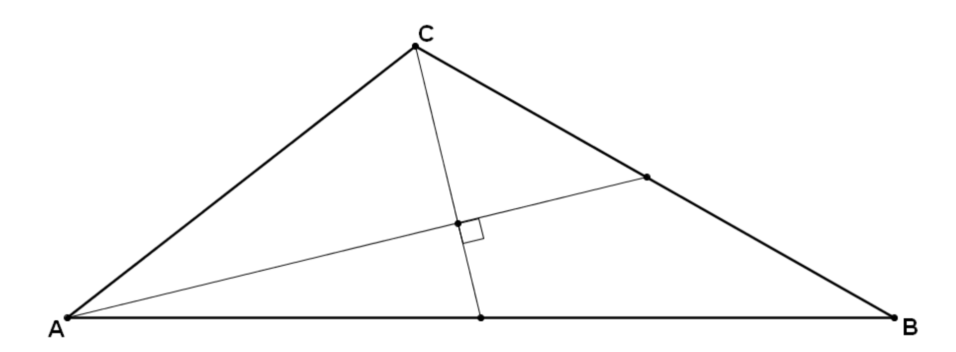
entonces los puntos O, P y Q están alineados.



USAJMO 2016 #5

20. Medianas perpendiculares.

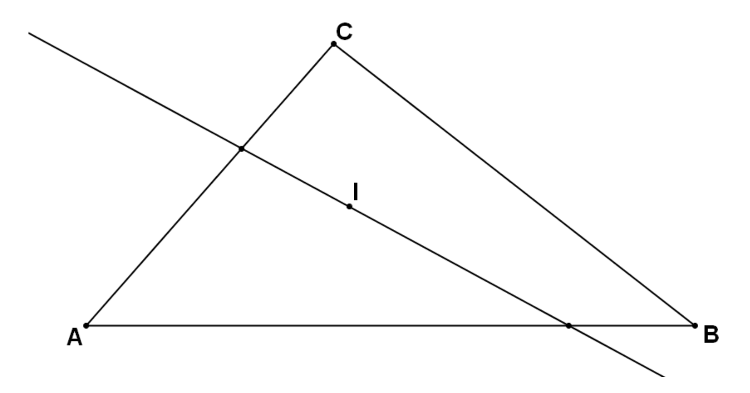
En un triángulo ΔABC se cumple $\overline{AB} = 15$ y $\overline{BC} = 10$. Las medianas por A y por C son perpendiculares. Calcula $\overline{AC}$.



Fuente: https://matemelga.wordpress.com/2018/06/14/dos-medianas/

21. Recta en triángulo con igual área y perímetro pasa por incentro.

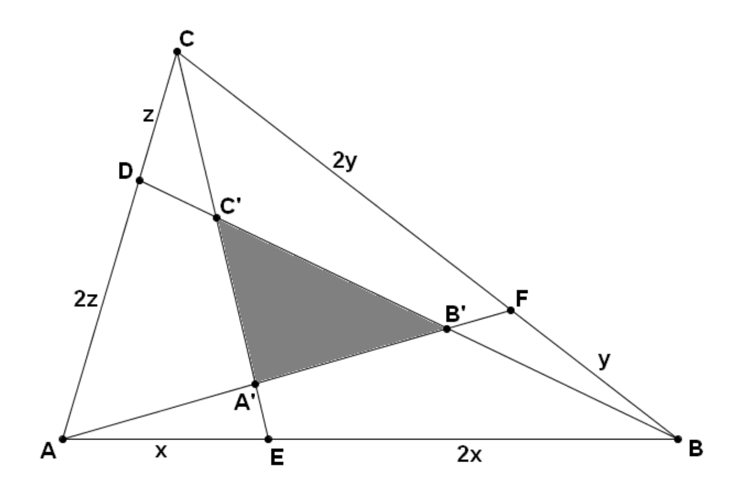
Demostrar que una recta que divide a un triángulo ΔABC en dos polígonos del mismo perímetro y de la misma área pasa por el centro de la circunferencia inscrita.



Fuente: Oposiciones Secundaria Castilla La Mancha 2018, problema #2.

22. Razón entre áreas de dos triángulos.

Relacionar el área del triángulo ΔABC con el área del triángulo sombreado



Fuente: Oposiciones Secundaria La Rioja 2018, problema #3

Ejercicios de geometría proyectiva analítica

23. Hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas de la recta r que pasa por los puntos (1 : -1 : 2) y (2 : 1 : 1) de $IP^2(k)$. Hallar también el punto de intersección de r con la recta s de ecuación $x_0 + x_1 + x_2 = 0$. Hallar las ecuaciones del haz de rectas que pasan por $r \cap s$.

24. a) Estudiar las posiciones relativas de tres rectas en un plano proyectivo.

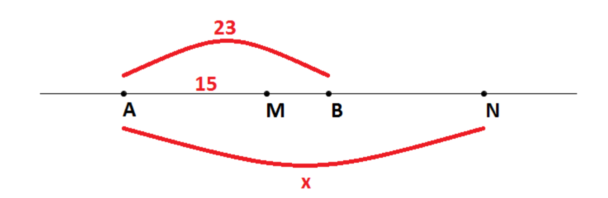
- Tres rectas coincidentes.
- Tres rectas con un punto de intersección común.
- Tres rectas que se cortan dos a dos en puntos diferentes.

b) Determinar las posiciones relativas de las siguientes ternas de rectas en $IP^2(IR)$:

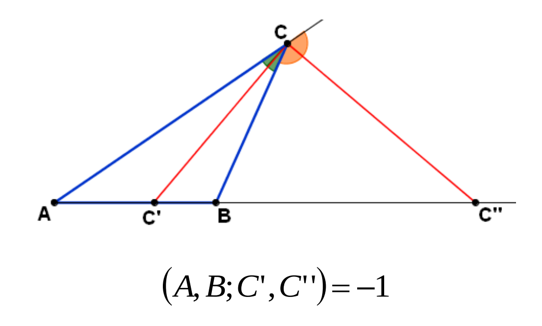
b1) $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3x + z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$ b2) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 3y - 3z = 0 \\ x + 3z = 0 \end{cases}$ b3) $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$

25. Sean A, B, C y D son cuatro puntos que forman una cuaterna armónica. Si AC=2 y CB=1, determinar la longitud de BD.

26. Un segmento AB mide 23 cm, el segmento AM 15 cm. ¿Cuánto mide el segmento AN, siendo N el punto conjugado armónico de M con relación a AB?



27. Demostrar que en todo triángulo, dos vértices y los pies de las bisectrices interior y exterior que parten del tercero constituyen una cuarterna armónica.



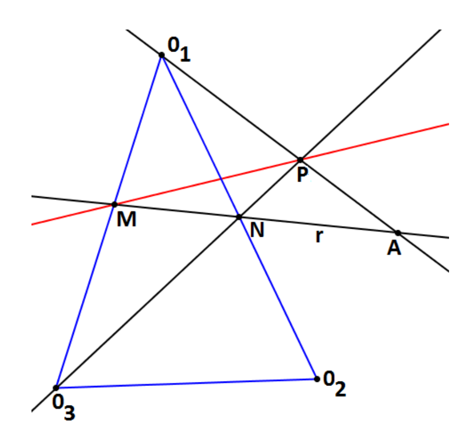
$$(A, B; C', C'') = -1$$

28. Probar que en P^3 dos planos diferentes siempre se cortan en una recta.

29. Determinar la ecuación de la recta de P^3 que pasa por los puntos (1:2:8) y (-7:0:3).

30. En el plano proyectivo real hallar las ecuaciones del cambio de coordenadas del referencial (A,B,C;D) al referencial (A',B',C';D'), donde
A=(1:0:0) , B=(0:1:0) , C=(0:0:1) , D=(1:1:1)
A'=(3:1:-3) , B'=(-1:0:5) , C'=(1:8:-1) , D'=(3:9:1)

31. Se considera en el plano proyectivo real un refererencial $(O_1, O_2, O_3; I)$ y el punto $A = (0:1:1)$. Se traza por A una recta variable r que corta a O_1O_3 en M y a O_1O_2 en N. Sea P el punto de intersección entre O_3N y O_1A. Demostrar que la recta MP pasa por un punto fijo cuando r varía.

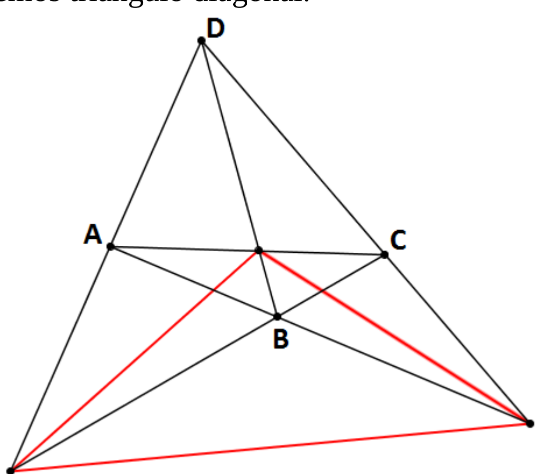


32. En el plano proyectivo real se consideran los puntos $O_1 = (1:0:0)$, $O_2 = (0:1:0)$ y $O_3 = (0:0:1)$ y los puntos $A = (0:a_2:a_3)$, $B = (b_1:0:b_3)$ y $C = (c_1:c_2:0)$ sobre los lados del triángulo $O_1O_2O_3$.
Demostrar que las rectas O_1A, O_2B y O_3C son concurrentes si, y solo si

$$\frac{a_2}{a_3} \cdot \frac{b_3}{b_1} \cdot \frac{c_1}{c_2} = 1$$

(Demostración analítica del Teorema de Ceva)

33. Sea ABCD un cuadrilátero completo. Demostrar que los puntos $AD \cap BC$, $AB \cap CD$, $AC \cap BD$ no están alineados. Así pues, estos tres puntos determinarán un triángulo al que llamaremos triángulo diagonal.



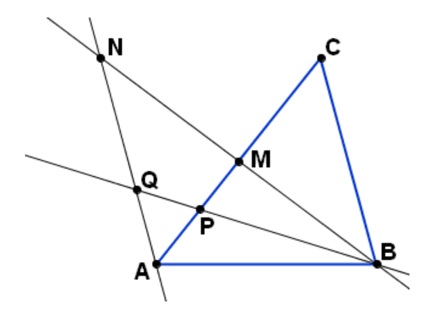
34. Calcula la razón doble (ABCD) de los siguientes cuatro puntos de P^3:

A=(1:1:-1:1), B=(0:1:1:-1), C=(2:1:-3:3), D=(4:3:-5:5)

35. Sobre la recta proyectiva compleja y respecto a un referentical R, las coordenadas de los puntos A, B, C y D son, respectivamente: 1, i, -1 y –i. Hallar la razón doble (ABCD).

36. Sea $f : P^1 \to P^1$ una proyectividad en la que, fijado una referencia, tenemos:
$f(1:0)=(2:-3)$, $f(0:1)=(1:1)$, $f(1:1)=(0:5)$
Calcula la imagen de $(7:21)$

37. Sea ΔABC un triángulo. Sea M el punto medio de AC, y sea N un punto de la recta BM tal que AN sea paralelo a BC. Sea P un punto cualquiera de la recta AC, y sea Q el punto de intersección de las rectas BP y AN.



Utilizando la razón doble, demostrar que $\dfrac{AQ}{QN} = \dfrac{1}{2}\dfrac{AP}{PM}$.

38. Sea una proyectividad $f : IP^2 \to IP^2$ con tres puntos fijos no alineados A, B y C.
a) Escoger una referencia y escribir la matriz asociada a esta proyectividad.
b) Dado un punto $Q \in IP^2$ fuera del triángulo ABC, probar que las razones dobles siguientes no dependen del punto Q escogido:
$\left(Q, f(Q); Qf(Q) \cap AB, Qf(Q) \cap AC\right)$
$\left(Q, f(Q); Qf(Q) \cap AB, Qf(Q) \cap BC\right)$
$\left(Q, f(Q); Qf(Q) \cap AC, Qf(Q) \cap BC\right)$

39. Hallar la forma canónica de la homografía del plano real de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_0' = 2x_0 + x_1 - x_2 \\ x_1' = 2x_1 - x_2 \\ x_2' = -3x_0 - 2x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

40. Clasificar la homografía en el plano proyectivo real de ecuaciones:

$$\begin{cases} x'_0 = -x_0 + 2x_1 + x_2 \\ x'_1 = -2x_1 \\ x'_2 = -2x_2 \end{cases}$$

41. Reducir a la forma canónica la homografía de ecuaciones

$$\begin{cases} x'_0 = x_1 \\ x'_1 = x_2 \\ x'_2 = x_0 - 3x_1 + 3x_2 \end{cases}$$

42. Sea f la homografía del plano proyectivo definida por:

$$\begin{cases} x'_0 = -x_1 + x_2 \\ x'_1 = \beta x_0 - x_2 \\ x'_2 = x_0 - 7x_1 \end{cases}$$

a) Determinar β para que el punto (1,0,1) sea fijo.
b) Hallar los puntos invariantes de f.
c) Hallar las rectas invariantes de f.
d) Hallar la ecuación canónica de f.

43. Determinar las ecuaciones de la homografía que transforma los puntos A=(0,0,1), B=(0,1,0), C=(1,0,0) y D=(1,1,1) respectivamente en los puntos B, C, D, A. Hallar los elementos dobles de la misma.

44. Sobre la recta proyectiva real y respecto a un referencial R se tiene la proyectividad tal que

$A(3) \to A'(-1)$

$B(0) \to B'(2)$

$C(-1) \to C'(1)$

Hallar la ecuación implícita de la proyectividad y sus puntos dobles.

45. Una proyectividad de la recta real en sí misma está determinada por

$$A(1) \to A'(0)$$
$$B(-2) \to B'(2)$$
$$C(0) \to C'(1)$$

Hallar la ecuación de la proyectividad, los puntos dobles y los puntos límites.

46. Hallar la ecuación de una involución sobre la recta compleja cuyos puntos dobles son i y –i.

47. Descomponer la proyectividad $5x'x + 2x' - x + 1 = 0$ en el producto de dos involuciones.

48. Encontrar la forma canónica de la proyectividad de la recta real sobre sí misma dada por

$$xx' - x - x' - 3 = 0$$

49. Encontrar la ecuación canónica de la proyectividad de la recta real en sí misma cuya ecuación es

$xx' + 3x - 2x' - 2 = 0$

50. Clasificar la familia de proyectividades de la recta real:

$$xx' + (2+\lambda)x + x' - 4 = 0$$

51. Se considera la proyectividad de una recta proyectiva real sobre sí misma de ecuación

$$xx' - 4x + 2x' - 3 = 0$$

Hallar:
a) Forma matricial.
b) Puntos dobles.
c) Puntos límite.

52. Dada una colineación f de un plano proyectivo en sí mismo y una recta r tal que $f(r) \neq r$, demostrar que existe un único punto $P \in r$ tal que $f(P) \in r$.

53. Hallar las ecuaciones de la proyectividad entre dos planos proyectivos reales determinada por

$$(1,0,0) \mapsto (3,1,-1)$$
$$(0,1,0) \mapsto (-1,0,2)$$
$$(0,0,1) \mapsto (1,5,0)$$
$$(1,1,1) \mapsto (3,6,1)$$

54. En un plano proyectivo IP^2 se consideran cuatro puntos A=(1,0,0), B=(1,1,1), C=(0,1,1) y D=(-2,1,1).
a) Comprobar que están alineados
b) Calcular la razón doble [A,B;C,D].
c) Hallar el punto $A' \in IP^2$ tal que $[A', B; C, D] = -1$.

55. Dados cuatro puntos distintos A, B, C y D sobre una recta r, dar una proyectividad (composición de perspectividades) tal que

$r(A,B,C,D) \overline{\wedge} r(C,D,A,B)$

56. Probar que en una perspectividad entre dos rectas diferentes simpre existe un punto invariante, pero nunca más de uno.

57. Determinar la expresión analítica de una homografía de la recta proyectiva real $P_1(IR)$ de la que se sabe que tiene un punto fijo único, el punto (0,1), y que transforma el punto (1,2) en el punto (2,5).

Soluciones

Se ofrecen soluciones completas a todos y cada uno de los ejercicios. Siempre se indica la fuente del enunciado y de la solución. Si no se indica la fuente, son del autor de este libro, Gerard Romo, que con ellas no pretende exhibir erudición: no son necesariamente las mejores, ni las más bellas, ni las óptimas. Seguro que tú encontrarás soluciones alternativas mucho mejores que las mías.

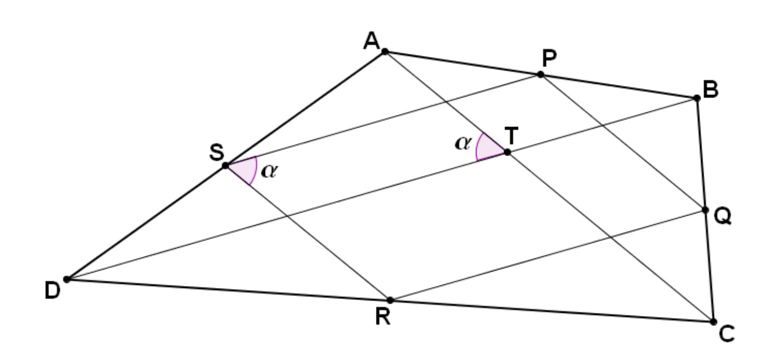
Las referencias numéricas que aparecen en las demostraciones (por ejemplo: 6.3.2 o 11.5.4) indican apartados del libro de teoría, que se puede descargar gratuitamente en el enlace siguiente:
www.toomates.net/biblioteca/GeometriaAxiomatica.pdf

1.

Sea $\Delta ABCD$ un cuadrilátero cualquiera y marcamos los puntos medios P, Q, R y S de los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$, tal y como aparecen en el esquema superior.

Trazamos su diagonal $\overline{AC}$. En el triángulo ΔACD los puntos S y R son puntos medios de dos de sus lados, luego por 7.2.1 tenemos que $\overleftrightarrow{SR} // \overleftrightarrow{AC}$ y $|SR| = \frac{1}{2}|AC|$.
Trazando la otra diagonal $\overline{BD}$ y con el mismo razonamiento anterior deducimos que $\overleftrightarrow{SP} // \overleftrightarrow{BD}$ y $|SP| = \frac{1}{2}|BD|$.

Sea T el punto de corte de las diagonales y $\alpha = |\angle ATD|$.



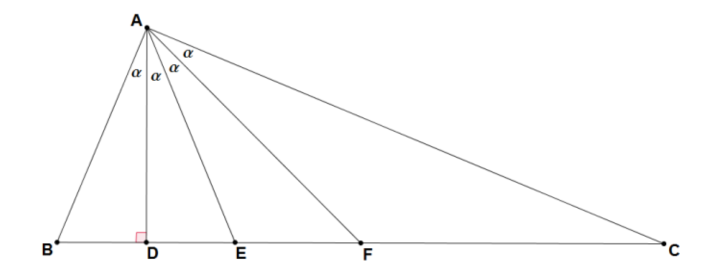
Por 9.2.4 tenemos que $[\Delta ABCD] = \frac{AC \cdot BD \cdot \sin\alpha}{2}$
Los paralelogramos tienen los ángulos opuestos congruentes, luego $|\angle PSR| = \alpha$.
Por 9.2.5 tenemos que $[\Delta SPQR] = SP \cdot SR \cdot \sin\alpha$

Y por tanto
$[\Delta SPQR] = SP \cdot SR \cdot \sin\alpha = BD/2 \cdot AC/2 \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}\frac{BD \cdot AC \cdot \sin\alpha}{2} =$
$\frac{1}{2}[\Delta ABCD]$

2.

Primera versión. (Por trigonometría)

Sea ΔABC un triángulo. Sea $\overline{AD}$ la altura por A, $\overline{AE}$ la bisectriz del ángulo A y $\overline{AF}$ la mediana del lado $\overline{BC}$. Sea $\alpha = \angle BAD = \angle DAE = \angle EAF = \angle FAC$.



Sea $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ y $m = AF$. $BF = FC = a/2$.
Aplicando el Teorema del seno al triángulo ΔABF:

$$\frac{m}{\sin\angle B} = \frac{a/2}{\sin 3\alpha} \Rightarrow \frac{m}{a/2} = \frac{\sin\angle B}{\sin 3\alpha}$$

Aplicando el Teorema del seno al triángulo ΔAFC:

$$\frac{m}{\sin\angle C} = \frac{a/2}{\sin\alpha} \Rightarrow \frac{m}{a/2} = \frac{\sin\angle C}{\sin\alpha}$$

De lo que deducimos que

$$\frac{\sin\angle B}{\sin 3\alpha} = \frac{\sin\angle C}{\sin\alpha}$$

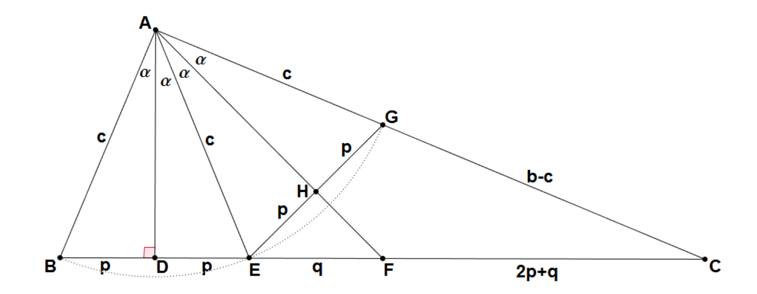
Pero $\angle B = 90 - \alpha \Rightarrow \sin\angle B = \sin(90-\alpha) = \cos\alpha$
y $\angle C = 90 - 3\alpha \Rightarrow \sin\angle C = \sin(90-3\alpha) = \cos 3\alpha$
Luego

$$\frac{\cos\alpha}{\sin 3\alpha} = \frac{\cos 3\alpha}{\sin\alpha} \Rightarrow \sin\alpha\cdot\cos\alpha = \sin 3\alpha\cdot\cos 3\alpha$$

Ahora aplicando la identidad trigonométrica $\sin(2\sigma) = \sin(\sigma)\cos(\sigma)$, llegamos a $\sin(2\alpha) = \sin(6\alpha)$
Equación que tiene dos soluciones posibles: $2\alpha = 6\alpha \Rightarrow \alpha = 0$, y
$2\alpha = 180 - 6\alpha \Rightarrow 8\alpha = 180 \Rightarrow \alpha = 180/8 = 22.5$.

Fuente de esta versión: http://jwilson.coe.uga.edu/emt725/Prob.2.35.1/solution.html

Segunda versión. (Mediante el Teorema de la bisectriz).
Sea ΔABC un triángulo. Sea $\overline{AD}$ la altura por A, $\overline{AE}$ la bisectriz del ángulo A y $\overline{AF}$ la mediana del lado $\overline{BC}$. Sea $\alpha = \angle BAD = \angle DAE = \angle EAF = \angle FAC$.
Trazamos el punto G del lado AC tal que $\overline{AG} = \overline{AB}$.
Los triángulos ΔADB y ΔADE son congruentes, luego $p = \overline{BD} = \overline{DE}$ y $c = \overline{AB} = \overline{AE} = \overline{AG}$. Sea $q = \overline{EF}$. Luego $FC = BF = 2p + q$ y $GC = b - c$.



Sea H el punto de intersección de AF y EG. El triángulo ΔAEG es isósceles, y por tanto $AH \perp HE$, luego el triángulo ΔEHF es recto en el vértice H. Por otro lado
$\Delta ABE \cong \Delta AEG \Rightarrow p = \overline{BD} = \overline{DE} = \overline{EH} = \overline{HG}$, y
$\angle FEH = 180 - \angle DEA - \angle AEH = 180 - (90 - \alpha) - (90 - \alpha) = 2\alpha$.
Aplicando el Teorema de la bisectriz al triángulo ΔAEC:

$$\frac{q}{2p+q} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{b}{2p+q} = \frac{c}{q} \quad (1)$$

Aplicando el Teorema de la bisectriz al triángulo ΔABC ($\overline{BE} = 2p$, $\overline{CE} = 2p + 2q$)

$$\frac{2p}{2p+2q} = \frac{c}{b} \quad (2)$$

Ahora aplicamos la igualdad $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$
Al resultado (1):

$$\frac{c}{q} = \frac{b}{2p+q} = \frac{b+c}{2p+q+q} = \frac{b+c}{2p+2q} \Rightarrow \frac{b}{b+c} = \frac{2p+q}{2p+2q}$$

Y al resultado (2):

$$\frac{2p}{2p+2q} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{2p}{c} = \frac{2p+2q}{b} = \frac{4p+2q}{b+c} \Rightarrow \frac{b+c}{b} = \frac{4p+2q}{2p+2q} = \frac{2p+q}{p+q}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{b+c} = \frac{p+q}{2p+q}$$

De todo lo cual deducimos que

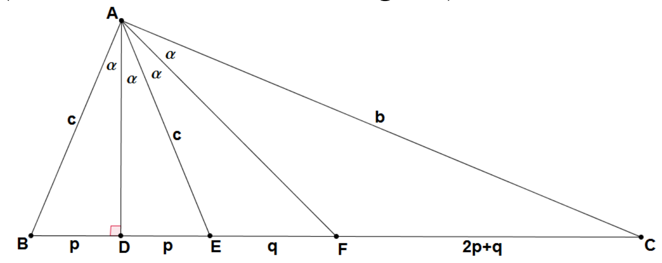
$$\frac{2p+q}{2p+2q} = \frac{p+q}{2p+q} \Rightarrow (2p+q)^2 = 2(p+q)^2 \Rightarrow 4p^2 + 4pq + q^2 = 2p^2 + 4pq + 2q^2 \Rightarrow$$

$$2p^2 = q^2 \Rightarrow q = \sqrt{2}p$$

De esto deducimos que el triángulo rectángulo ΔEHF es isósceles, y por tanto $\angle HEF = 45^{\circ}$. Pero $\angle HEF = 2\alpha$, así pues, $\alpha = 22.5$.

Fuente de esta versión: https://www.quora.com/...

Tercera versión. (Similar a la anterior, más elegante)



Ya hemos demostrado en versiones anteriores que $p = \overline{BD} = \overline{DE}$ y $c = \overline{AB} = \overline{AE}$.
Aplicando el Teorema de la bisectriz al triángulo ΔAEC:

$$\frac{q}{2p+q} = \frac{c}{b} \Leftrightarrow \frac{q}{c} = \frac{2p+q}{b}$$

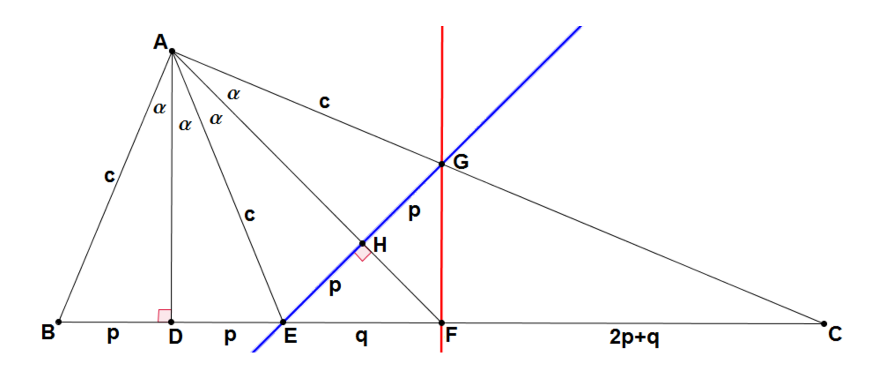
Aplicando el Teorema de la bisectriz al triángulo ΔABC:

$$\frac{c}{b} = \frac{2p}{2p+2q} = \frac{p}{p+q} \Rightarrow \frac{c}{p} = \frac{b}{p+q} \Rightarrow \frac{p}{c} = \frac{p+q}{b}$$

Sumando ambas igualdades:

$$\frac{q}{c} + \frac{p}{c} = \frac{2p+q}{b} + \frac{p+q}{b} \Leftrightarrow \frac{q+p}{c} = \frac{2p+q+p+q}{b} = \frac{3p+2q}{b} \quad (1)$$

En el esquema anterior trazamos la perpendicular a E por AF, que cortará AC en el punto G y AF en el punto H.



$\Delta AHE \cong \Delta ADE \cong \Delta AHG \Rightarrow \overline{EH} = \overline{HG} = p, \overline{AG} = \overline{AE} = \overline{AB} = c$.

Y ahora vemos que la igualdad anterior se puede interpretar geométricamente:

$\frac{q+p}{c} = \frac{3p+2q}{b} \Leftrightarrow \frac{DF}{AG} = \frac{DC}{AC}$

Y por el Teorema 8.1.6 se deduce $FG \,//\, DA$, es decir, $FG \perp BC$.

Finalmente, $\angle DFA = 90 - 2\alpha$, pero además $\Delta EHF \cong \Delta GHF$, luego $\angle HFG \cong \angle DFA$, luego $90 = \angle EFH + \angle HFG = 90 - 2\alpha + 90 - 2\alpha = 180 - 4\alpha \Rightarrow 4\alpha = 90 \Rightarrow \alpha = 22.5$

Fuente de la versión: http://grunschblog.blogspot.com.es/2011/06/when-altitude-bisector-and-median-make.html

3.

La bisectriz EB también es bisectriz del triángulo ΔADB, y aplicando el Teorema de la bisectriz (11.3.2) a este triángulo tenemos

$$\frac{AF}{FD} = \frac{6}{BD}$$

Aplicando el Teorema de la bisectriz al triángulo ΔABC con la bisectriz AD tenemos

$$\frac{CD}{BD} = \frac{AC}{AB} = \frac{8}{6} = \frac{3}{2}$$

Puesto que además sabemos $CD + BD = 7$ podemos solucionar el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{CD}{BD} = \dfrac{3}{2} \\ CD + BD = 7 \end{cases} \Rightarrow CD = 4, BD = 3$$

Y por lo tanto $\frac{AF}{FD} = \frac{6}{BD} = \frac{6}{3} = \frac{2}{1}$ (C)

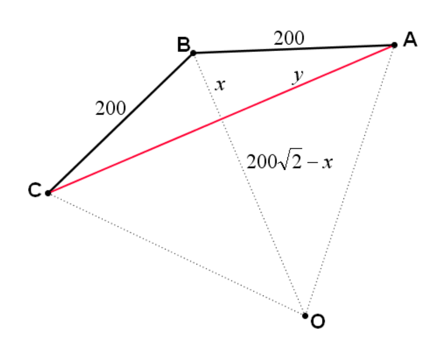
En http://artofproblemsolving.com/wiki/index.php?title=2016_AMC_12A_Problems/Problem_12 se pueden encontrar tres soluciones diferentes para este mismo problema.

4.

La figura está formada por triángulos isósceles congruentes, luego $\angle ABC = \angle ABO + \angle OBC = \angle BCO + \angle OCD = \angle BCD$, y por tanto $\Delta ABC \cong \Delta BCD$ por el criterio SAS, luego $AC = BD$. Luego, por el Teorema de Ptolomeo (10.5.9), $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD \Rightarrow$

$$AC^2 = 200 \cdot 200 + 200 \cdot AD \Rightarrow AD = \frac{AC^2 - 200^2}{200} \quad (1)$$

El cuadrilátero $\lozenge ABCO$ es una cometa (AB=BC y OC=OA), luego sus diagonales se cortan en ángulo recto (3.13.2), $AC \perp BO$, y por lo tanto su diagonal AC la podemos calcular mediante el Teorema de Pitágoras:



$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 200^2 \\ (200\sqrt{2} - x)^2 + y^2 = \left(200\sqrt{2}\right)^2 \end{cases}$$

$$(200\sqrt{2} - x)^2 + y^2 = \left(200\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow \left(200\sqrt{2}\right)^2 - 2 \cdot 200\sqrt{2}x + x^2 + y^2 = \left(200\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$-2 \cdot 200\sqrt{2}x + x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow$$

$$-2 \cdot 200\sqrt{2}x + 200^2 = 0 \Rightarrow -2\sqrt{2}x + 200 = 0 \Rightarrow x = \frac{100}{\sqrt{2}}$$

$$\left(\frac{100}{\sqrt{2}}\right)^2 + y^2 = 200^2 \Rightarrow \frac{100^2}{2} + y^2 = 200^2 \Rightarrow y^2 = 200^2 - \frac{100^2}{2} = 35000 \Rightarrow$$

$$y = \sqrt{35000} = 50\sqrt{14}$$

Luego $AC = 2y = 100\sqrt{14}$

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD \Rightarrow$$

$$AC^2 = 200 \cdot 200 + 200 \cdot AD \Rightarrow AD = \frac{AC^2 - 200^2}{200}$$

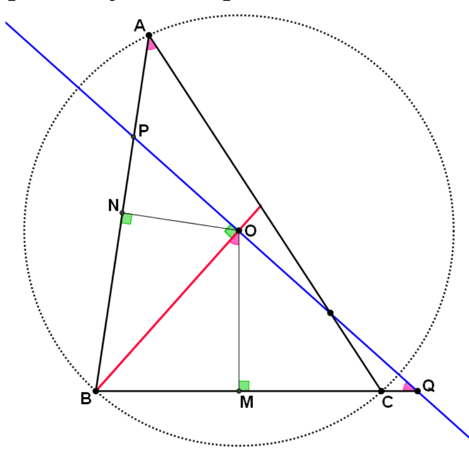
Finalmente volvemos a (1):

$$AD = \frac{\left(100\sqrt{14}\right)^2 - 200^2}{200} = \frac{14 \cdot 100^2 - 200^2}{200} = \frac{100^2(14-4)}{200} = \frac{100 \cdot 10}{2} = 500$$

En http://artofproblemsolving.com/wiki/index.php?title=2016_AMC_10A_Problems/Problem_24
Se pueden encontrar hasta siete soluciones diferentes de este problema.

5.

En primer lugar vamos a ver que ΔABC y ΔQBA son triángulos semejantes. Trazamos las mediatrices OM y ON por BC y AB respectivamente:



$\angle BOM = \frac{1}{2}\angle BOC$ pues $\angle BOM = \angle MOC$ por ser OM mediatriz del lado BC.

$\angle BOC = 2\angle BAC$ por el Teorema del ángulo central (10.1.1).

Y finalmente observamos que ΔBOM y ΔBOQ son triángulos semejantes pues son triángulos rectángulos compartiendo el ángulo $\angle OBM$, luego $\angle OBM = \angle OQM$.

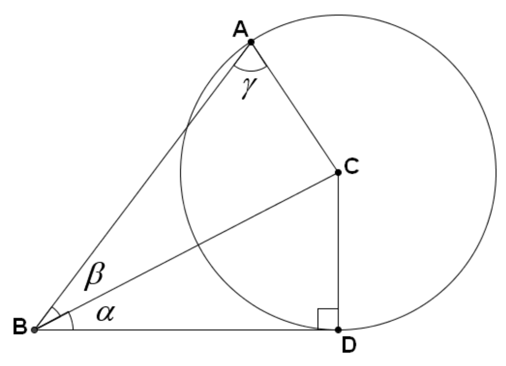
Con todo esto llegamos a $\angle PQB = \angle BOM = \angle BAC$, y por lo tanto $\Delta ABC \approx \Delta QBA$, por el criterio AA de semejanza.

Con este resultado, el problema se resuelve con la proporcionalidad de lados:

$$\frac{BP}{BC} = \frac{BQ}{BA} \Rightarrow \frac{BP}{4} = \frac{4.5}{5} \Rightarrow BP = \frac{18}{5}$$

6.

Nombramos los puntos y recordamos que toda recta tangente a una circunferencia es perpendicular a su radio.



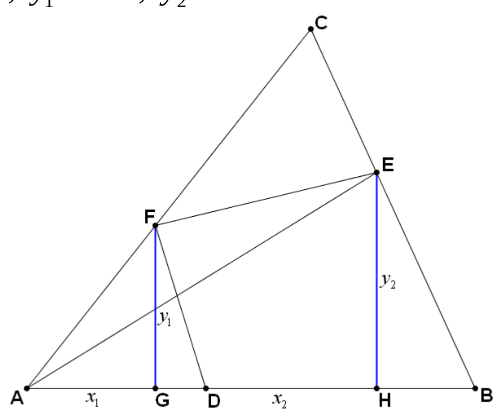
Por el Teorema del Seno, y puesto que $AC = CD$:

$$\frac{\sin\gamma}{BC} = \frac{\sin\beta}{AC} \Rightarrow \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{BC}{AC} = \frac{BC}{CD} = \frac{1}{\sin\alpha}$$

Luego $\sin\gamma \sin\alpha = \sin\beta$, es decir, la solución correcta es (b).

7.

Primera versión.
Trazamos las perpendiculares a AB por F y por E, que cortarán el lado AB en G y H respectivamente.
Sean $x_1 = \overline{AG}$, $x_2 = \overline{AH}$, $y_1 = \overline{GF}$, $y_2 = \overline{HE}$



$$\left[\Delta ABE\right] = \left[\Diamond DBEF\right] \Leftrightarrow$$
$$\frac{5y_2}{2} = \frac{(5-x_2)y_2}{2} + (x_2 - x_1)y_1 + \frac{(x_2-x_1)(y_2-y_1)}{2} - \frac{(2-x_1)y_1}{2} \Leftrightarrow$$
$$5y_2 = (5-x_2)y_2 + 2(x_2-x_1)y_1 + (x_2-x_1)(y_2-y_1) - (2-x_1)y_1 \Leftrightarrow$$
$$5y_2 = (5-x_2)y_2 + (x_2-x_1)\big(2y_1 + (y_2-y_1)\big) - (2-x_1)y_1 \Leftrightarrow$$
$$5y_2 = (5-x_2)y_2 + (x_2-x_1)(y_1+y_2) - (2-x_1)y_1 \Leftrightarrow$$
$$x_1 y_2 = y_1(x_2 - 2) \Leftrightarrow \frac{y_2}{x_2-2} = \frac{y_1}{x_1}$$

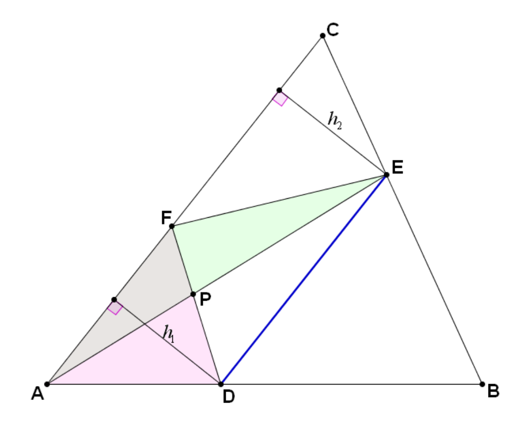
Luego los triángulos ΔAFG y ΔDEH son semejantes pues están en posición de Tales (8.3.6) y por tanto $GE // AC$.

Sea k la altura del triángulo ΔABC por C. Entonces: $10 = \left[\Delta ABC\right] = \dfrac{5k}{2} \Rightarrow k = 4$

Los triángulos ΔABC y ΔDBE serán semejantes, por lo tanto sus alturas serán proporcionales a sus bases:

$$\frac{k}{AB} = \frac{y_2}{DB} \Leftrightarrow \frac{4}{5} = \frac{y_2}{3} \Rightarrow y_2 = \frac{12}{5} \Rightarrow \left[\Delta ABE\right] = \frac{5(12/5)}{2} = 6$$

Segunda versión.
Sea P el punto de corte de AE y FB. $\left[\Delta ABE\right] = \left[\Diamond DBEF\right]$ equivale a decir que los triángulos $\left[\Delta ADP\right] = \left[\Delta PFE\right]$, y por tanto $\left[\Delta ADF\right] = \left[\Delta AEF\right]$. Ambos triángulos comparten la base $\overline{AF}$, luego sus alturas h_1 y h_2 serán iguales.



De aquí deducimos que la recta DE es paralela a AC.
Luego los triángulos ΔABC y ΔDBE serán semejantes, pues están en posición de Tales. Luego

$$\frac{CE}{BE} = \frac{AD}{DB} = \frac{2}{3}$$

Sea h la altura del triángulo por el vértice A. Entonces

$$\frac{[\Delta AEC]}{[\Delta ABE]} = \frac{CE \cdot h/2}{BE \cdot h/2} = \frac{CE}{BE} = \frac{2}{3} \Rightarrow 2[\Delta ABE] = 3[\Delta AEC]$$

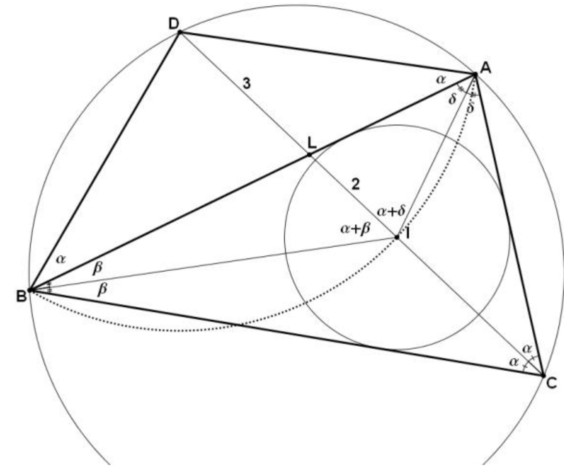
Y puesto que $[\Delta ABE] + [\Delta AEC] = [\Delta ABC] = 10$, nos encontramos con un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas cuya solución es $[\Delta ABE] = 6$.

Fuente de esta versión: http://www.matematicasjmmm.com/new-blog-1/2018/1/21/geometra-128-tringulos , www.matematicasjmmm.com (José María Martínez Mediano)

8.

Primera versión.
Sea $\alpha = \angle ICA = \angle ICB$, $\beta = \angle IBC = \angle IBA$, $\delta = \angle IAB = \angle IAC$.
$2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180.$
En primer lugar vamos a ver que $AD = DI = 5$.
El cuadrilátero $\lozenge DBCA$ es cíclico, por lo tanto
$\angle DBA = \angle DCA = \alpha$ y $\angle DAB = \angle DCB = \alpha$, luego ΔDBA es isósceles y por tanto DB=DA.
$\angle CDA = \angle ABC = 2\beta$, luego $\angle DIA = 180 - 2\beta - \alpha - \delta = \alpha + \beta = \angle DAI$, luego el triángulo ΔDAI es isósceles, y por tanto $AD = DI = 5$.

Por el criterio AA, $\Delta BLC \approx \Delta DAC$ pues $\angle ADC = \angle LBC = 2\beta$ y $\angle BCL = \angle DCA = \alpha$.



Por el Teorema de la Bisectriz IA en ΔALC: $\frac{IC}{2} = \frac{AC}{AL} \Rightarrow IC = 2\frac{AC}{AL}$

Por el Teorema de la Bisectriz LC en ΔABC: $\frac{BL}{LA} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{AC}{LA} = \frac{BC}{BL}$

Luego $IC = 2\frac{BC}{BL}$

Y finalmente, puesto que $\Delta BLC \approx \Delta DAC$, $\frac{BC}{BL} = \frac{DC}{DA} \Leftrightarrow \frac{BC}{BL} = \frac{5+IC}{5}$

Llegando a la ecuación $IC = 2\frac{5+IC}{5}$ que tiene como solución $IC = \frac{10}{3}$, y la solución es $10+3=13$.

Segunda versión.
Siguiendo los mismos razonamientos que en la primera versión, podemos llegar a $\Delta DLB \approx \Delta ALC$ puesto que $\angle DBL = \angle ACL$ y son triángulos opuestos por el vértice.
Luego $\frac{AC}{AL} = \frac{BD}{DL} = \frac{5}{3}$, y por el Teorema de la bisectriz, $\frac{CI}{IL} = \frac{AC}{AL} \Rightarrow CI = 2\frac{AC}{AL} = \frac{10}{3}$

Fuente de esta versión:
https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php?title=2016_AIME_I_Problems/Problem_6

9.

Claramente el triángulo ΔABC es rectángulo pues cumple el Teorema de Pitágoras: $3^2+4^2=5^2$.

Puesto que $\angle EBD$ es recto, la circunferencia ϖ tendrá diámetro $\overline{DE}$, y por lo tanto $\angle EGD$ y $\angle EFD$ son también ángulos rectos.

$$\tan\angle GED=\frac{GD}{GE}=\frac{3}{4}=\tan\angle C\Rightarrow\angle GED=\angle C$$

Por abarcar arcos iguales, $\angle GED=\angle GBD$.

Luego $\angle GBD=\angle C$ y por tanto el triángulo ΔBGC es isósceles, y $\overline{GB}=\overline{GC}$.

$\angle ABG=90-\angle GBC=90-\angle C=\angle A$, luego el triángulo ΔABG también es isósceles en G y en consecuencia $AG=BG=GC$. Luego G es el punto medio de AC, es decir, $AG=\frac{5}{2}$.

De $\angle GED=\angle C$ se deduce también que el triángulo rectángulo ΔDGE es semejante al triángulo ΔABC, y por tanto $\angle GDE=\angle A$.

Aplicando el Teorema del Seno,

$$\frac{EF}{\sin\angle A}=\frac{AF}{\sin\angle AEF}\ \text{ y }\ \frac{FD}{\sin\angle C}=\frac{FC}{\sin\angle CDF}$$

$\angle AEF=180-\angle FEB=\angle FDB=180-\angle CDF$, luego $\sin\angle AEF=\sin\angle CDF$. Además $EF=FD$ y $FC=5-AF$, con lo que las dos ecuaciones anteriores son un sistema que da como resultado $AF=\frac{15}{7}$.

$\lozenge GDEF$ es un cuadrilátero cíclico, luego $\angle GFE=180-\angle GDE=180-\angle A$.Luego $\angle AFE=180-\angle GFE=\angle A$ y por tanto el triángulo ΔAFE es isósceles en A, luego $\overline{AE}=\overline{FE}$.

$$Cos\angle A=\frac{3}{5}=\frac{AF/2}{AE}=\frac{15/14}{AE}\Rightarrow AE=\frac{5}{3}\cdot\frac{15}{14}=\frac{25}{14}=EF=FD$$

Finalmente, por el Teorema de Pitágoras:

$DE^2=FE^2+FD^2=2FE^2\Rightarrow DE=\sqrt{2}FE=\sqrt{2}\frac{25}{14}=\frac{25\sqrt{2}}{14}$. Por lo tanto la solución es $25+2+14=41$.

Observación.

De $AF=15/7$ y $AG=CG=5/2$ podemos aplicar el Teorema de la Potencia de un punto exterior de una circunferencia (10.1.6):

$AE\cdot AB=AF\cdot AG\Rightarrow AE\cdot 3=(15/7)\cdot(5/2)$

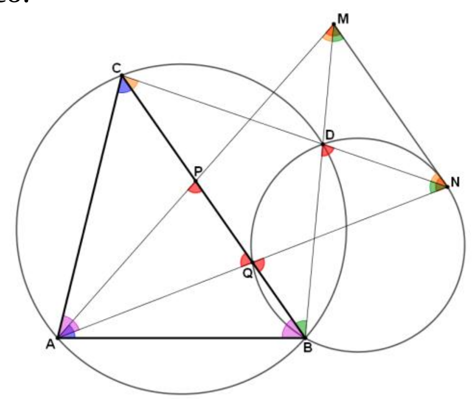
$CD\cdot CB=CG\cdot CF\Rightarrow CD\cdot 4=(5/2)\cdot(20/7)$

De donde deducir que $EB=17/14$ y $DB=31/14$. De aquí, utilizando el Teorema de Pitágoras, llegamos a la solución.

10.

Primera versión.

Sea E el punto de corte de BM y CN.
Los triángulos ΔABC y ΔQAC son semejantes por el criterio AA, luego $\angle AQC = \angle A$.
Y por tanto L $\angle BQN = \angle AQC = \angle A$ por ser ángulos opuestos por el vértice.
Por otro lado, los triángulos ΔAQC y ΔBPA son semejantes, nuevamente por el criterio AA, luego $\angle AQP = \angle APB$.
Luego ΔAPQ es isósceles en A y por tanto $AQ = AP = PM = QN$.
Por el Teorema del conector de puntos medios (7.2.1) deducimos que $MN \,//\, PQ$, y $\angle AMN = \angle ANM = \angle AQP = \angle APQ = \angle A$
Por el teorema de los ángulos internos alternos, $\angle CNM = \angle BCN$ y $\angle NMB = \angle BCN$, luego $\angle QBD = \angle CBM = \angle QNC = \angle QND$ y por tanto el cuadrilátero $\lozenge BQDN$ es cíclico. Luego $\angle BDN = \angle BQN = \angle A$, y por lo tanto $\angle CDB$ y $\angle A$ son suplementarios, es decir, $\lozenge ABDC$ es cíclico.



Segunda versión. Mediante coordenadas baricéntricas.

Sabemos que $\Delta ABC \approx \Delta PBA$, luego $\dfrac{PB}{AB} = \dfrac{AB}{BC}$, es decir, $\dfrac{PB}{BC} = \dfrac{c^2}{a^2}$, y por tanto el punto P tiene por coordenadas baricéntricas

$$P = \left(0, 1 - \frac{c^2}{a^2}, \frac{c^2}{a^2}\right) = \left(0 : a^2 - c^2 : c^2\right)$$

El punto M cumple $AM = -2MP$, luego para determinar sus coordenas baricéntricas aplicaremos 14.3.3 con $p = 1$ y $q = -2$

$$\overrightarrow{AP} = P - A = \left(0, 1 - \frac{c^2}{a^2}, \frac{c^2}{a^2}\right) - (1,0,0) = \left(-1, 1 - \frac{c^2}{a^2}, \frac{c^2}{a^2}\right)$$

$$M = (-2)P + 1Q = (-2)\left(0, 1 - \frac{c^2}{a^2}, \frac{c^2}{a^2}\right) + (1,0,0) =$$

$$= \left(0, -2\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right), \frac{-2c^2}{a^2}\right) + (1,0,0) = \left(1, -2\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right), \frac{-2c^2}{a^2}\right)$$

$$= \left(-a^2 : 2\left(a^2 - c^2\right) : 2c^2\right)$$

De la misma forma, $\Delta ABC \approx \Delta PAC$, luego $\frac{CQ}{AC} = \frac{AC}{BC}$, es decir, $\frac{CQ}{CB} = \frac{b^2}{a^2}$, y por tanto el punto Q tiene por coordenadas baricéntricas

$$Q = \left(0, \frac{b^2}{a^2}, 1 - \frac{b^2}{a^2}\right) = \left(0 : b^2 : a^2 - b^2\right)$$

El punto M cumple $AN = -2NP$, luego para determinar sus coordenas baricéntricas aplicaremos 14.3.3 con $p = 1$ y $q = -2$

$$N = \left(-a^2 : 2b^2 : 2\left(a^2 - b^2\right)\right)$$

Determinamos la ecuación de la recta BM (14.4.8):

$$0 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ -a^2 & 2\left(a^2 - c^2\right) & 2c^2 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2\left(a^2 - c^2\right) & 2c^2 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -a^2 & 2c^2 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -a^2 & 2\left(a^2 - c^2\right) \end{vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$0 = 2c^2 x + a^2 z \Leftrightarrow z = \frac{-2c^2}{a^2} x$$

Determinamos la ecuación de la recta CN:

$$0 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ -a^2 & 2b^2 & 2\left(a^2 - b^2\right) \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2b^2 & 2\left(a^2 - b^2\right) \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -a^2 & 2\left(a^2 - b^2\right) \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -a^2 & 2b^2 \end{vmatrix} \Leftrightarrow$$

$$0 = -2b^2 x - a^2 y \Leftrightarrow y = \frac{-2b^2}{a^2} x$$

Por lo tanto el punto E de intersección entre BM y CN es

$$E = \left(1 : \frac{-2b^2}{a^2} : \frac{-2c^2}{a^2}\right) = \left(a^2 : -2b^2 : -2c^2\right)$$

Y este punto pertenece a la circunferencia circunscrita asociada al triángulo de referencia ΔABC pues satisface su ecuación baricéntrica (14.6.6):

$$a^2 yz + b^2 xz + c^2 xy = 0$$

Efectivamente, $a^2(-2b^2)(-2c^2) + b^2(a^2)(-2c^2) + c^2(a^2)(-2b^2) = 0$

Fuente: Soluciones basadas en diferentes aportaciones de los usuarios de https://artofproblemsolving.com/community/c6t32014f6h597090_imo_2014_problem_4

11.

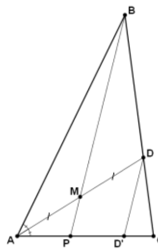
Primera versión.

Por el Teorema de la bisectriz tenemos

$$\frac{CD}{AC}=\frac{BD}{AB}\Leftrightarrow\frac{CD}{BD}=\frac{AC}{AB}=\frac{11}{20}$$

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $CD=11$ y $BD=20$, luego $BC=31$.

Trazamos ahora la recta paralela a BP por D, y sea D' su punto de corte con AC.



Por Teorema de Tales $\frac{PD'}{PC}=\frac{BD}{DC}=\frac{20}{31}$.

Y por también por Teorema de Tales tenemos $\frac{AP}{PD'}=\frac{AM}{MD}=1\Rightarrow AP=PD'$

Por lo tanto, finalmente, $\frac{AP}{PC}=\frac{PD'}{PC}=\frac{20}{31}$, y la respuesta es $20+31=51$

Una forma alternativa sería aplicar el Teorema de Menelao al triángulo ΔACD con la transversal BP, obteniendo: $1=\frac{AP}{PC}\cdot\frac{CB}{BD}\cdot\frac{DM}{MA}=\frac{AP}{PC}\cdot\frac{CB}{BD}$ y deducir la razón buscada.

Segunda versión. Con coordenadas baricéntricas.

Puesto que $AB=\frac{20}{11}AC$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $c=AB=20$ y $b=AC=11$.

La bisectriz del ángulo $\angle A$ tendrá entonces por ecuación $20y-11z=0$ (ver 14.3.10) y por lo tanto el punto D será $D=(0:11:20)=\left(0,\frac{11}{31},\frac{20}{31}\right)$.

El punto medio M del segmento AD satisface la razón $AM=MD$ y por tanto tendrá asociadas las coordenadas (ver 14.3.3)

$$M=1(1,0,0)+1\left(0,\frac{11}{31},\frac{20}{31}\right)=\left(1:\frac{11}{31}:\frac{20}{31}\right)=(31:11:20)$$

La recta BM tendrá por ecuación:

$$0=\begin{vmatrix}x & y & z\\ 0 & 1 & 0\\ 31 & 11 & 20\end{vmatrix}=x\begin{vmatrix}1 & 0\\ 11 & 20\end{vmatrix}-y\begin{vmatrix}0 & 0\\ 31 & 20\end{vmatrix}+z\begin{vmatrix}0 & 1\\ 31 & 11\end{vmatrix}=20x-31z$$

Y finalmente, las coodenadas del punto P serán

$$P=(31:0:20)=\left(\frac{31}{51},0,\frac{20}{51}\right)\Rightarrow\frac{AP}{PC}=\frac{20/51}{31/51}=\frac{20}{31}\Rightarrow m+n=51$$

Fuente de esta solución:
http://artofproblemsolving.com/wiki/index.php?title=2011_AIME_II_Problems/Problem_4

12.

Primera versión. Mediante coordenadas baricéntricas.

Sea $A=(1,0,0)$, $B=(0,1,0)$ y $C=(0,0,1)$.

Entonces claramente $D=(0:3:1)=\left(0,\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)$.

Y el punto E, por ser el punto medio de $\overline{AD}$ tendrá por coordenadas baricéntricas:

$E=A+D=(1,0,0)+\left(0,\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)=\left(1:\frac{3}{4}:\frac{1}{4}\right)=(4:3:1)=\left(\frac{1}{2},\frac{3}{8}:\frac{1}{8}\right)$.

Luego $\overrightarrow{EC}=\left(\frac{1}{2},\frac{3}{8}:\frac{1}{8}\right)-(0,0,1)=\left(\frac{1}{2},\frac{3}{8},\frac{-7}{8}\right)$

Aplicamos la fórmula de la distancia:

$7=\left(\sqrt{7}\right)^2=\left|EC\right|^2=-a^2yz-b^2zx-c^2xy=-a^2\frac{3}{8}\frac{(-7)}{8}-b^2\frac{(-7)}{8}\frac{1}{2}-c^2\frac{1}{2}\frac{3}{8}$

Teniendo en cuenta que $a=b$, y simplificando denominadores:

$7\cdot 8\cdot 8=-a^2(-21)-a^2(-7)4-c^2 3\cdot 4\Leftrightarrow 448=49a^2-12c^2$

De la misma forma aplicamos la fórmula de la distancia al vector $\overrightarrow{EB}$:

$\overrightarrow{EB}=\left(\frac{1}{2},\frac{3}{8}:\frac{1}{8}\right)-(0,1,0)=\left(\frac{1}{2},\frac{-5}{8},\frac{1}{8}\right)$

$9=3^2=\left|EB\right|^2=-a^2yz-b^2zx-c^2xy=-a^2\frac{(-5)}{8}\frac{1}{8}-b^2\frac{1}{8}\frac{1}{2}-c^2\frac{1}{2}\frac{(-5)}{8}$

$9\cdot 8\cdot 8=-a^2(-5)-a^2 4-c^2(-5)4=384=5a^2-4a^2+20c^2$

$576=a^2+20c^2$

Todo se reduce a resolver el sistema $\begin{cases}448=49a^2-12c^2\\ 576=a^2+20c^2\end{cases}$

$a^2=576-20c^2\Rightarrow 448=49(576-20c^2)-12c^2\Rightarrow c=\pm 2\sqrt{7}$.

Con $c=2\sqrt{7}$ nos queda $a^2=576-20\cdot 4\cdot 7=16\Rightarrow a=\sqrt{16}=4$

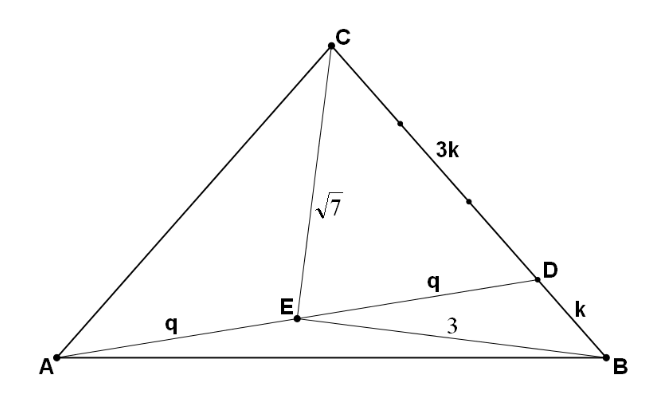
Es decir, el triángulo tiene lados $a=b=4$ y $c=2\sqrt{7}$.

Por ser un triángulo isósceles, su altura por C será $\sqrt{4^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}=\sqrt{16-7}=3$, y finalmente

$\left[\Delta ABC\right]=\frac{1}{2}2\sqrt{7}\cdot 3=3\sqrt{7}$, y la solución es $3+7=10$.

Segunda versión. Mediante el Teorema de Stewart.

Sea $k = BD$. Entonces $CD = 3k$ y $AC = BC = 4k$. Sea $q = DE = AE$.



Aplicamos el Teorema de Stewart (9.1.6) al triángulo ΔCEB:

$$q^2 4k = 7k + 9 \cdot 3k - k \cdot 3k \cdot 4k \Leftrightarrow 4kq^2 = 7k + 27k - 12k^3 \Leftrightarrow 4q^2 = 34 - 12k^2$$

Aplicamos el mismo teorema al triángulo ΔCAD:

$$7 \cdot 2q = (3k)^2 q + (4k)^2 q - q^2 2q \Leftrightarrow 14 = 9k^2 + 16k^2 - 2q^2 \Leftrightarrow 14 = 25k^2 - 2q^2$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones anterior:

$$14 = 25k^2 - 2q^2 \Rightarrow 28 = 50k^2 - 4q^2 \Rightarrow 4q^2 = 50k^2 - 28$$

$$50k^2 - 28 = 34 - 12k^2 \Rightarrow 62k^2 = 62 \Rightarrow k = \pm 1 \Rightarrow k = 1$$

$$4q^2 = 50 - 28 = 22 \Rightarrow q = \sqrt{11/2}$$

Aplicamos el Teorema del Coseno al triángulo ΔCAD:

$$\left(2\sqrt{\frac{11}{2}}\right)^2 = 22 = 4^2 + 3^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot Cos\angle C \Rightarrow 22 = 16 + 9 - 24 \cdot Cos\angle C \Rightarrow \frac{1}{8} = Cos\angle C$$

Aplicamos la propiedad fundamental de la trigonometría:

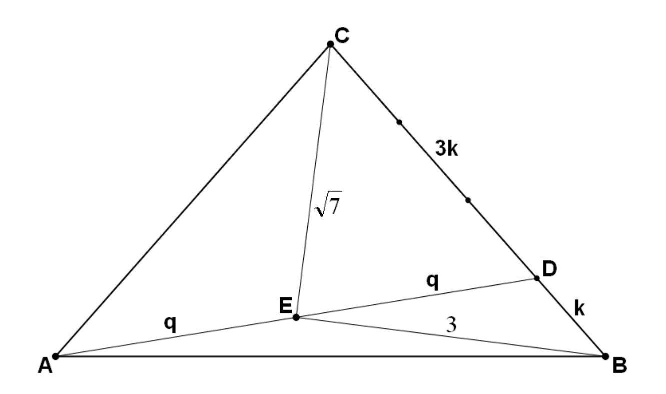
$$\sin^2 \angle C + \cos^2 \angle C = 1 \Rightarrow \sin^2 \angle C = 1 - \cos^2 \angle C = 1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64} \Rightarrow \sin \angle C = \sqrt{\frac{63}{64}} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

Finalmente:

$[\Delta ABC] = \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot Sin\angle C = \frac{1}{2} 4 \cdot 4 \cdot \frac{3\sqrt{7}}{8} = 3\sqrt{7}$ y la solución es 3+7=10.

Tercera versión. Mediante el Teorema del coseno.

Nuevamente, sea $k = BD$. Entonces $CD = 3k$ y $AC = BC = 4k$. Sea $q = DE = AE$.



Aplicamos el Teorema del Coseno en los triángulos ΔAEC y ΔCED:

$(4k)^2 = q^2 + \left(\sqrt{7}\right)^2 - 2q\sqrt{7}\cos(\angle AEC) \Leftrightarrow 16k^2 = q^2 + 7 - 2q\sqrt{7}\cos(\angle AEC)$

$(3k)^2 = q^2 + \left(\sqrt{7}\right)^2 - 2q\sqrt{7}\cos(\angle DEC) \Leftrightarrow 9k^2 = q^2 + 7 - 2q\sqrt{7}\cos(\angle DEC)$

por ser ángulos suplementarios $\cos(\angle AEC) = -\cos(\angle DEC)$, luego tenemos el sistema

$$\begin{cases} 16k^2 = q^2 + 7 - 2q\sqrt{7}\cos(\angle AEC) \\ 9k^2 = q^2 + 7 + 2q\sqrt{7}\cos(\angle AEC) \end{cases}$$

de donde deducimos $25k^2 = 2q^2 + 14$ (1)

Aplicamos el Teorema del Coseno en el triángulo ΔEDC:

$7 = (\sqrt{7})^2 = q^2 + (3k)^2 - 2q3k\cos(\angle EDC) \Leftrightarrow 7 = q^2 + 9k^2 - 6qk\cos(\angle EDC)$

Aplicamos el Teorema del Coseno en el triángulo ΔEDB:

$9 = 3^2 = q^2 + k^2 - 2qk\cos(\angle EDB)$

Por ser ángulos suplementarios, $\cos(\angle EDC) = -\cos(\angle EDB)$, y por tanto

$$\begin{cases} 7 = q^2 + 9k^2 - 6qk\cos(\angle EDC) \\ 9 = q^2 + k^2 + 2qk\cos(\angle EDC) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7 = q^2 + 9k^2 - 6qk\cos(\angle EDC) \\ 27 = 3q^2 + 3k^2 + 6qk\cos(\angle EDC) \end{cases}$$

De donde deducimos $34 = 4q^2 + 12k^2$ (2)

De (1) y (2) obtenemos el sistema $\begin{cases} 25k^2 = 2q^2 + 14 \\ 34 = 4q^2 + 12k^2 \end{cases}$

que ya hemos resuelto en la versión anterior.

Fuente de las soluciones:
https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php?title=2013_AIME_II_Problems/Problem_13

13.

Sean D, E y F los puntos de corte de AP, BP y CP con los lados opuestos respectivamente.

Sabemos que $\frac{d}{a+d}=\frac{[\Delta BPC]}{[\Delta ABC]}$, $\frac{d}{b+d}=\frac{[\Delta APC]}{[\Delta ABC]}$ y $\frac{d}{c+d}=\frac{[\Delta APB]}{[\Delta ABC]}$ (ver 9.2.3)

Luego

$$1=\frac{[\Delta ABC]}{[\Delta ABC]}=\frac{[\Delta BPC]+[\Delta APC]+[\Delta APB]}{[\Delta ABC]}=$$

$$=\frac{[\Delta BPC]}{[\Delta ABC]}+\frac{[\Delta APC]}{[\Delta ABC]}+\frac{[\Delta APB]}{[\Delta ABC]}=\frac{d}{a+d}+\frac{d}{b+d}+\frac{d}{c+d}=$$

$$=\frac{d(b+d)(c+d)+d(a+d)(c+d)+d(a+d)(b+d)}{(a+d)(b+d)(c+d)}=$$

$$=3\frac{(b+d)(c+d)+(a+d)(c+d)+(a+d)(b+d)}{(a+d)(b+d)(c+d)}\Rightarrow$$

$$\frac{(a+d)(b+d)(c+d)}{3}=(b+d)(c+d)+(a+d)(c+d)+(a+d)(b+d)$$

$$\frac{(a+d)(b+d)(c+d)}{3}=\frac{27+9(a+b+c)+3(ab+ac+bc)+abc}{3}=$$

$$=9+3(a+b+c)+(ab+ac+bc)+\frac{abc}{3}=138+(ab+ac+bc)+\frac{abc}{3}$$

$$(b+d)(c+d)+(a+d)(c+d)+(a+d)(b+d)=$$

$$=27+6(a+b+c)+ab+ac+bc=27+6\cdot 43+ab+ac+bc=285+ab+ac+bc$$

Luego nos queda

$$138+(ab+ac+bc)+\frac{abc}{3}=285+ab+ac+bc\Rightarrow\frac{abc}{3}=147\Rightarrow abc=441$$

Fuente de la solución:
https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php?title=1988_AIME_Problems/Problem_12

14.

Aplicando el Teorema de Menelao en el triángulo ΔARC con la transversal XQ deducimos

$$\frac{AQ}{QR}\cdot\frac{RB}{BC}\cdot\frac{CX}{XA}=1 \Leftrightarrow \frac{9}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{CX}{XA}=1 \Leftrightarrow \frac{CX}{XA}=\frac{1}{2}$$

Aplicando el Teorema de Menelao al triángulo ΔBCX con la transversal QR:

$$\frac{BR}{RC}\cdot\frac{CA}{AX}\cdot\frac{XQ}{QB}=1 \Leftrightarrow \frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{XQ}{QB}=1 \Leftrightarrow \frac{XQ}{QB}=\frac{1}{3}$$

Finalmente, aplicando el Teorema de Menelao al triángulo ΔABQ con la transversal ZP:

$$\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{BX}{XQ}\cdot\frac{QP}{PA}=1 \Rightarrow \frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{12}{3}\cdot\frac{4}{5}=1 \Rightarrow \frac{AZ}{ZB}=\frac{3\cdot 5}{4\cdot 12}=\frac{5}{16}$$

15.

a) $M = A + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = A + \frac{1}{3}(B - A) = A + \frac{1}{3}B - \frac{1}{3}A = \frac{2}{3}A + \frac{1}{3}B$

$M = \frac{2}{3}(3,3) + \frac{1}{3}(6,12) = (4,6)$

De la misma forma:

$N = A + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = A + \frac{2}{3}(B - A) = A + \frac{2}{3}B - \frac{2}{3}A = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B$

$M = \frac{1}{3}(3,3) + \frac{2}{3}(6,12) = (5,9)$

b) $\frac{1}{2}(A + C) = \frac{1}{2}(B + D) \Rightarrow A + C = B + D \Rightarrow D = A + C - B$

$D = (1,0) + (0,0) - (0,1) = (1,-1)$

c)

i) Sabemos que

$$G = \frac{1}{3}(A + B + C) \Rightarrow 3G = A + B + C$$

$$M = \frac{1}{2}(B + C) \Rightarrow 2M = B + C$$

$$N = \frac{1}{2}(A + C) \Rightarrow 2N = A + C$$

De donde se deduce

$3G - 2M = A + B + C - (B + C) = A \Rightarrow A = 3(1,2) - 2(2,4) = (-1,-2)$

$2N - A = C \Rightarrow C = 2(3,-2) - (-1,-2) = (7,-2)$

$2M = B + C \Rightarrow B = 2M - C = 2(2,4) - (7,-2) = (-3,10)$

d) Fijamos la referencia ABC. $A = (1:0:0)$, $B = (0:1:0)$, $C = (0:0:1)$, $AC: y = 0$, $AB: z = 0$, y $BC: x = 0$.

Entonces $P = (0:a,1-a) \in BC$.

La recta por P y paralela a AC es: $(1-a)y - a(x+z) = 0$

Y su punto de intersección con AB es: $\begin{cases} z = 0 \\ a\,x = (1-a)y \end{cases} \Rightarrow C' = (1-a, a, 0)$.

La recta por C' y paralela a BC es: $ax - (1-a)(y+z) = 0$

Y su punto de intersección con AC es: $B' = (1-a:0:a)$.

La recta que pasa por P y es paralela a AB es: $az - (1-a)(x+y) = 0$

Y su punto de intersección con AC es: $B'' = (a:0:1-a)$

La recta que pasa por B'' y es paralela a BC es: $(1-a)x - a(y+z) = 0$

Y su punto de intersección con AB es: $C'' = (a:1-a:0)$.

El baricentro del triángulo PB'C'' es

$$\frac{1}{3}(P+B'+C'')=\frac{1}{3}\big((a:1-a:0)+(1-a:0:a)+(0:a:1-a)\big)=\frac{1}{3}\big((1:1:1)$$

que es el baricentro de ABC.

ii) Si P es el punto medio de BC, entonces a=1/2, y $B'=(1/2:0:1/2)$ y $C''=(1/2:1/2:0)$ son los puntos medios de los respectivos lados, y las rectas AP, BB' y CC'' son las medianas del triángulo, que se cortan en el baricentro.

iii) Recta AP: $0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & a & 1-a \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=x\begin{vmatrix} a & 1-a \\ 0 & 0 \end{vmatrix}-y\begin{vmatrix} 0 & 1-a \\ 1 & 0 \end{vmatrix}+z\begin{vmatrix} 0 & a \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=y(1-a)-az=0$

Recta CC'': $0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 1-a & 0 & a \end{vmatrix}=x\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix}-y\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1-a & a \end{vmatrix}+z\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1-a & 0 \end{vmatrix}=ax-z(1-a)=0$

Recta BB': $0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ a & 1-a & 0 \end{vmatrix}=x\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1-a & 0 \end{vmatrix}-y\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{vmatrix}+z\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a & 1-a \end{vmatrix}=-(1-a)x+ay=0$

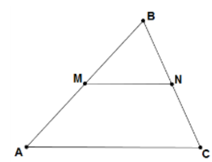
Las tres rectas son concurrentes, por lo tanto el determinante de sus coeficientes es cero:

$$0=\begin{vmatrix} 0 & 1-a & -a \\ a & 0 & -(1-a) \\ -(1-a) & a & 0 \end{vmatrix}=-a\begin{vmatrix} 1-a & -a \\ a & 0 \end{vmatrix}-(1-a)\begin{vmatrix} 1-a & -a \\ 0 & -(1-a) \end{vmatrix}=$$

$$=-a^3+(1-a)^3$$

La única solución real de esta ecuación es $a=1/2$, es decir, cuando P es el punto medio del lado del triángulo.

e)



Fijamos la referencia ABC.

$M=\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B=(1:1:0)$, $N=\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}C=(0:1:1)$ (Coordenadas no absolutas)

La recta MN tendrá por ecuación:

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=x-y+z$$

La recta AC tiene por ecuación y=0, y por lo tanto, el punto de intersección de ambas es:

$\begin{cases} x-y+z=0 \\ y=0 \end{cases}\Rightarrow x+z=0\Rightarrow z=-x\Rightarrow MN\cap AC=(1:0:-1)$, punto que pertenece a la recta del infinito $x+y+z=0$.

16.

Primera versión.

$$\frac{CF}{CA}=r\Rightarrow\frac{AF}{CA}=\frac{CA-CF}{CA}=\frac{CA}{CA}-\frac{CF}{CA}=1-r$$

$$\left.\begin{array}{l}[\Delta ADF]=1/2\cdot AD\cdot AF\cdot\sin(\angle A)\\ [\Delta ABC]=1/2\cdot AC\cdot AB\cdot\sin(\angle A)\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{[\Delta ADF]}{[\Delta ABC]}=\frac{AD\cdot AF}{AC\cdot AB}=\frac{AF}{AC}\frac{AD}{AB}=(1-r)p$$

y de la misma forma $\frac{[\Delta BDE]}{[\Delta ABC]}=(1-p)q$ y $\frac{[\Delta CEF]}{[\Delta ABC]}=(1-q)r$

$$1=\frac{[\Delta ABC]}{[\Delta ABC]}=\frac{[\Delta ADF]+[\Delta BDE]+[\Delta CEF]+[\Delta FDE]}{[\Delta ABC]}=$$

$$=\frac{[\Delta ADF]}{[\Delta ABC]}+\frac{[\Delta BDE]}{[\Delta ABC]}+\frac{[\Delta CEF]}{[\Delta ABC]}+\frac{[\Delta FDE]}{[\Delta ABC]}=p(1-r)+q(1-p)+(1-q)r+\frac{m}{n}$$

Por otro lado,

$$2(pq+pr+qr)=(p+q+r)^2-(p^2+q^2+r^2)=\left(\frac{2}{3}\right)^2-\frac{2}{5}=\frac{4}{9}-\frac{2}{5}=\frac{2}{45}\Rightarrow$$

$$pq+pr+qr=\frac{1}{45}$$

y por tanto

$$\frac{m}{n}=1-p(1-r)+q(1-p)+(1-q)r=1-(p+q+r)+\left(pq+pr+qr\right)=$$

$$=1-\frac{2}{3}+\frac{1}{45}=\frac{16}{45}\Rightarrow m+n=45+16=61$$

Segunda version. Con coordenadas baricéntricas.

Sea $A=(1,0,0)$, $B=(0,1,0)$ y $C=(0,0,1)$.

Entonces $D=(1-p,p,0)$, $E=(0,1-q,q)$ y $F=(r,0,1-r)$, y por la fórmula del área de un triángulo en coordenadas baricéntricas (14.3.5), tenemos

$$\frac{[\Delta DEF]}{[\Delta ABC]}=\begin{vmatrix}1-p & p & 0\\ 0 & 1-q & q\\ r & 0 & 1-r\end{vmatrix}=(1-p)\begin{vmatrix}1-q & q\\ 0 & 1-r\end{vmatrix}+r\begin{vmatrix}p & 0\\ 1-q & q\end{vmatrix}=$$

$$=(1-p)(1-q)(1-r)+rpq=1-(p+q+r)+pq+pr+qr$$

obteniendo la misma expresión que en la primera versión.

Nota:

En ambas versiones queda de manifiesto que la información inicial del problema: "$AB=13$, $BC=15$ y $CA=17$" no es necesaria en absoluto para su resolución.

17.

Aplicaremos el corolario 9.2.3:

$$1=\frac{[\Delta ABC]}{[\Delta ABC]}=\frac{[\Delta APB]+[\Delta BPC]+[\Delta APC]}{[\Delta ABC]}=\frac{[\Delta APB]}{[\Delta ABC]}+\frac{[\Delta BPC]}{[\Delta ABC]}+\frac{[\Delta APC]}{[\Delta ABC]}=$$

$$=\frac{PF}{20}+\frac{6}{12}+\frac{3}{12}\Rightarrow PF=5$$

Las coordenadas baricéntricas del punto P serán, pues,

$$P=\left(\frac{PD}{AD},\frac{EP}{EB},\frac{PF}{CF}\right)=\left(\frac{6}{12},\frac{3}{12},\frac{5}{20}\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)=(2:1:1)$$

Calculamos las coordenadas del punto F. Para ello en primer lugar calculamos la recta CP:

$$0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=x\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}-y\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}+z\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\Leftrightarrow -x+2y=0$$

y su intersección con la recta AB, que tiene por ecuación $z=0$, es decir, $F=(2:1:0)$. Esto quiere decir que $FB=2AF$.

Ahora aplicamos el Teorema de Stewart (9.1.6) en el triángulo ΔABP para determinar el lado AB: Sea $a=AF$, $FB=2a$, $AB=3a$, luego

$$5^2 3a=6^2\cdot 2a+9^2 a-a\cdot 2a\cdot 3a\Rightarrow a=\sqrt{13}\Rightarrow AB=3a=3\sqrt{13}.$$

De aquí deducimos que el triángulo ΔABP es rectángulo, pues $CF^2=117=AP^2+PB^2=6^2+9^2$, luego podemos calcular su área de forma directa:

$[\Delta ABP]=\frac{9\cdot 6}{2}=27$, (si no fuera rectángulo, hubiéramos aplicado la fórmula de Heron).

Finalmente: $[\Delta ABC]=4[\Delta ABP]=4\cdot 27=108$

18.

Resolveremos este problema mediante coordenadas baricéntricas.
En vez de comenzar por el punto P de la circunferencia circunscrita, empezaremos fijando un punto D en el lado BC, que tendrá pues coordenadas baricéntricas: $D = (0, k, 1-k)$ para cualquier $0 < k < 1$.
La recta AD tendrá asociada la ecuación

$$0 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & k & 1-k \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow (1-k)y = k\,z \Leftrightarrow y = \frac{k}{1-k} z$$

La circunferencia circunscrita de un triángulo tiene por ecuación $a^2yz + b^2zx + c^2xy = 0$ (ver 14.6.6). Puesto que trabajamos con un triángulo equilátero, podemo suponer $a = b = c = 1$, y por tanto se reduce a $yz + zx + xy = 0$
El punto P será la intersección de AD y esta circunferencia, es decir

$$y\frac{1-k}{k}y + \frac{1-k}{k}x + xy = 0 \Leftrightarrow \frac{1-k}{k}y^2 + \left(\frac{1-k}{k} + 1\right)xy = 0$$

$$\Leftrightarrow y\left(\frac{1-k}{k}y^2 + \frac{1}{k}x\right) = 0$$

Puesto que $y \neq 0$ nos queda $\frac{1-k}{k}y^2 + \frac{1}{k}x = 0 \Leftrightarrow x = (k-1)y$, es decir, el punto

$$P = \left(k-1 : 1 : \frac{1-k}{k}\right)$$

Calculamos la recta CP: $0 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ k-1 & 1 & \frac{1-k}{k} \end{vmatrix} \Leftrightarrow x = (k-1)y$

El punto F será su intersección con la recta AB, de ecuación $z = 0$, es decir

$$F = (k-1 : 1 : 0) = \left(\frac{k-1}{k}, \frac{1}{k}, 0\right)$$

Calculamos la recta BP: $0 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ k-1 & 1 & \frac{1-k}{k} \end{vmatrix} \Leftrightarrow 0 = \frac{1-k}{k}x - (k-1)z \Leftrightarrow x = -k\,z$

El punto E será su intersección con la recta AC, de ecuación $y = 0$, es decir

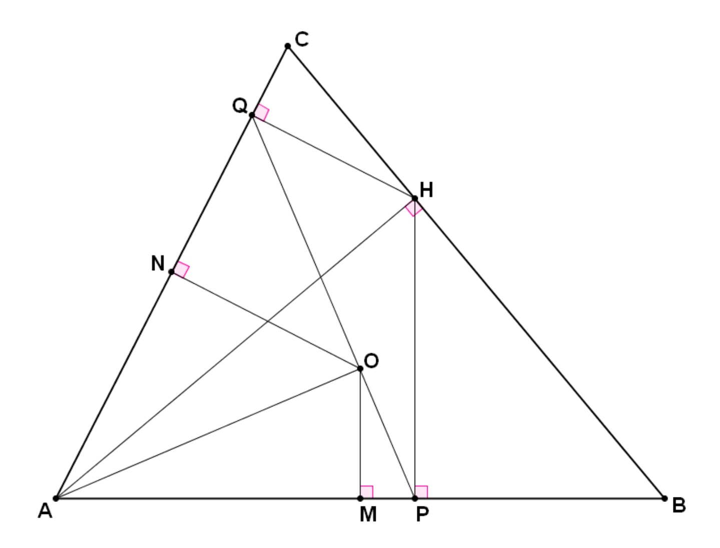
$$E = (-k : 0 : 1) = \left(\frac{-k}{1-k}, 0, \frac{1}{1-k}\right)$$

Ahora podemos calcular el área del triángulo ΔDEF:

$$\frac{[\Delta DEF]}{[\Delta ABC]} = \begin{vmatrix} 0 & k & 1-k \\ \frac{k-1}{k} & \frac{1}{k} & 0 \\ \frac{-k}{1-k} & 0 & \frac{1}{1-k} \end{vmatrix} = 2 \Rightarrow [\Delta DEF] = 2[\Delta ABC]$$

19.

Trazamos la perpendicular a AB por O, que cortará AB en su punto medio M.



Por el Teorema del Cateto (8.4.1) en ΔAHB tenemos que

$$AH^2 = AP \cdot AB$$

Puesto que M es el punto medio del lado AB, tenemos $AB = 2AM$, y por tanto

$$AH^2 = AP \cdot 2AM$$

Y puesto que $AH^2 = 2 \cdot AO^2$, llegamos a $2 \cdot AO^2 = AP \cdot 2AM$, es decir

$$AO^2 = AP \cdot AM$$

Aplicando ahora el recíproco del Teorema del Cateto (8.4.1d) deducimos que ΔAOP es un triángulo rectángulo en O.

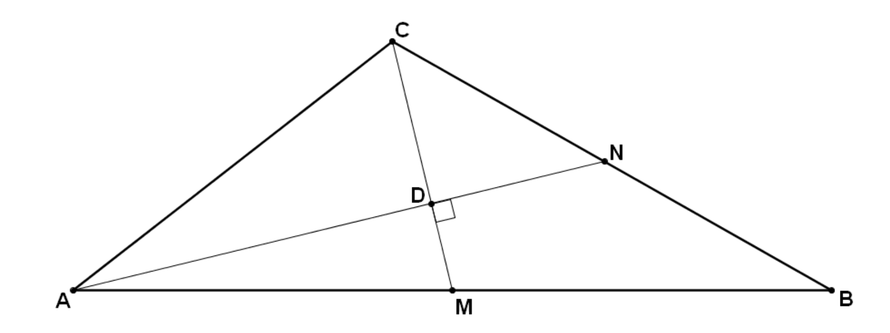
Con un razonamiento similar, si ahora trazamos la perpendicular por O a AC, que cortará AC en su punto medio N, tenemos
$AH^2 = AQ \cdot AC = AQ \cdot 2AN \Rightarrow 2 \cdot AO^2 = AQ \cdot 2AN \Rightarrow AO^2 = AQ \cdot AN$ y por lo tanto ΔAOQ es un triángulo rectángulo en O.

Luego los puntos P, O y Q están alineados (ver 3.5.8).

Fuente de la solución: “**champion999**” en
https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php?title=2016_USAJMO

20.

Sea M el punto medio de AB y N el punto medio de BC. Sea D el baricentro del triángulo.
En la parte izquierda del triángulo aparecen tres triángulos rectángulos en los que aplicaremos Teorema de Pitágoras:



$$\begin{cases} AD^2 + DM^2 = 7.5^2 \\ DC^2 + DN^2 = 5^2 \\ AD^2 + DC^2 = AC^2 \end{cases}$$

Sabemos además que $DC = 2DM$ y $AD = 2DN$ (11.4.3b)

Luego

$$\begin{cases} (2DN)^2 + DM^2 = 7.5^2 \\ (2DM)^2 + DN^2 = 5^2 \\ (2DN)^2 + (2DM)^2 = AC^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4DN^2 + DM^2 = 7.5^2 \\ 4DM^2 + DN^2 = 5^2 \\ 4DN^2 + 4DM^2 = AC^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4DN^2 + DM^2 = 7.5^2 \\ 4DM^2 + DN^2 = 5^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4DM^2 + 16DN^2 = 4 \cdot 7.5^2 \\ 4DM^2 + DN^2 = 5^2 \end{cases} \Rightarrow 15DN^2 = 4 \cdot 7.5^2 - 5^2$$

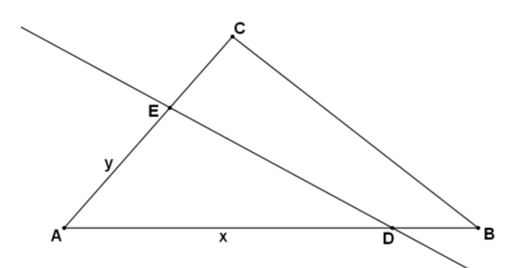
$$\Rightarrow DN^2 = \frac{4 \cdot 7.5^2 - 5^2}{15} = \frac{40}{3} \Rightarrow DM^2 = 7.5^2 - 4DN^2 = \frac{35}{12}$$

$$\Rightarrow AC^2 = 4DN^2 + 4DM^2 = 4 \cdot \frac{40}{3} + 4 \cdot \frac{35}{12} = 65 \Rightarrow AC = \sqrt{65}$$

21.

Primera versión:

Sean D y E los puntos de corte de dicha recta con el triángulo. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $D \in \overline{AB}$ y $E \in \overline{AC}$. Sea $x = \left|\overline{AD}\right|$ y $y = \left|\overline{AE}\right|$.



El perímetro del triángulo ΔADE ha de ser igual al perímetro del cuadrilátero $\Diamond ECBD$, esto es:

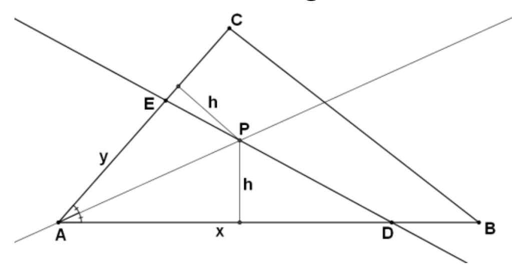
$$x + y + \overline{DE} = \overline{DE} + \overline{EC} + \overline{BC} + \overline{BD} \Rightarrow x + y = \overline{EC} + \overline{BC} + \overline{BD} \Rightarrow$$

$$x + y = \overline{AC} - y + \overline{BC} + \overline{AB} - x \Rightarrow 2x + 2y = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}$$

$$\Rightarrow x + y = \frac{\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}}{2} = p$$

Donde p es el semiperímetro del triángulo ΔABC

Trazamos la bisectriz del ángulo $\angle BAC$ y sea P su punto de corte con la recta. Trazamos las dos rectas perpendiculares desde P a AB y AC, que tendrán la misma longitud h pues pertenecen a la bisectriz del ángulo.



$$[\Delta ADE] = [\Delta ADP] + [\Delta AEP] = \frac{x \cdot h}{2} + \frac{y \cdot h}{2} = \frac{h}{2}(x + y) = \frac{h}{2} \cdot p$$

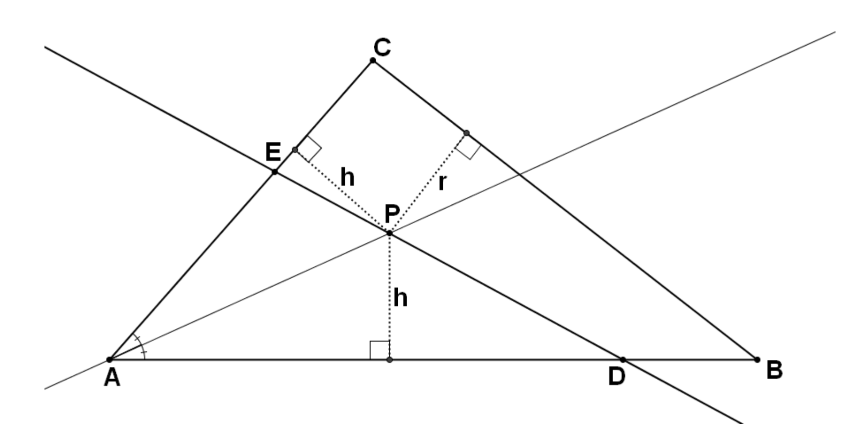
Ahora aplicamos 11.3.6: $[\Delta ABC] = r \cdot p$, donde r es el radio de la circunferencia inscrita

Luego: $[\Delta ADE] = \frac{1}{2}[\Delta ABC] \Rightarrow \frac{h}{2} p = \frac{1}{2} r \cdot p \Rightarrow h = r$

Luego P es el centro de la circunferencia inscrita (Se tendría que demostrar)

Fuente de la solución: https://youtu.be/uCHI2xiEC5Q (www.preparadordematematicas.com)

Segunda versión:
Supongamos que la recta corta a AB en D y a AC en E. Trazamos la bisectriz por A y sea P su punto de corte con la recta. Trazamos las perpendiculares por P a cada uno de los lados. Sabemos que dos de estas perpendiculares son iguales porque P pertenece a la bisectriz. Veamos que también es igual a la tercera, a la que llamaremos r.



$$[\Delta ADE]=[\Delta BCED]\Rightarrow[\Delta APE]+[\Delta ADP]=[\Delta PEC]+[\Delta PCB]+[\Delta PBD]\Rightarrow$$
$$\overline{AE}\cdot h+\overline{AD}\cdot h=\overline{CE}\cdot h+\overline{BC}\cdot r+\overline{BD}\cdot h\Rightarrow\left(\overline{AE}+\overline{AD}\right)\cdot h=\overline{CE}\cdot h+\overline{BC}\cdot r+\overline{BD}\cdot h$$

$$\overline{AD}+\overline{DE}+\overline{AE}=\overline{DE}+\overline{EC}+\overline{BC}+\overline{BD}\Rightarrow\overline{AD}+\overline{AE}=\overline{EC}+\overline{BC}+\overline{BD}\Rightarrow$$
$$\left(\overline{AD}+\overline{AE}\right)\cdot h=\left(\overline{EC}+\overline{BC}+\overline{BD}\right)\cdot h=\overline{EC}\cdot h+\overline{BC}\cdot h+\overline{BD}\cdot h$$

De lo que se deduce que

$$\overline{CE}\cdot h+\overline{BC}\cdot r+\overline{BD}\cdot h=\overline{EC}\cdot h+\overline{BC}\cdot h+\overline{BD}\cdot h\Rightarrow\overline{BC}\cdot r=\overline{BC}\cdot h\Rightarrow r=h$$

Luego P equidista de los tres lados del triángulo y por tanto es el incentro, tal y como queríamos ver.

Fuente de la solución: **Gustavo Tellez Soriano** (en Facebook)

22.

Este problema se resuelve fácilmente mediante coordenadas baricéntricas. Fijamos como referencia el triángulo ΔABC:

$A=(1:0:0)$

$B=(0:1:0)$

$C=(0:0:1)$

Para esta referencia baricéntrica tenemos

$D=(1:0:2)$

$E=(2:1:0)$

$F=(0:2:1)$

Y por tanto calculamos las ecuaciones de los lados del triángulo interior:

$$\text{Recta BD: } 0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow -2x+z=0$$

$$\text{Recta CE: } 0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow -x+2y=0$$

$$\text{Recta AF: } 0=\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \Leftrightarrow -y+2z=0$$

Ahora podemos calcular las coordenadas baricéntricas de los vértices del triángulo interior:

$$A': \begin{cases} -y+2z=0 \\ -x+2y=0 \end{cases} \Rightarrow A'=(4:2:1)=\left(\frac{4}{7},\frac{2}{7},\frac{1}{7}\right)$$

$$B': \begin{cases} -2x+z=0 \\ -y+2z=0 \end{cases} \Rightarrow A'=(1:4:2)=\left(\frac{1}{7},\frac{4}{7},\frac{2}{7}\right)$$

$$C': \begin{cases} -x+2y=0 \\ -2x+z=0 \end{cases} \Rightarrow C'=(2:1:4)=\left(\frac{2}{7},\frac{1}{7},\frac{4}{7}\right)$$

Y finalmente aplicamos 14.3.5

$$\frac{[\Delta A'B'C']}{[\Delta ABC]}=\begin{vmatrix} 4/7 & 2/7 & 1/7 \\ 1/7 & 4/7 & 2/7 \\ 2/7 & 1/7 & 4/7 \end{vmatrix} = \frac{1}{7^3}\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{7^3}\cdot 49 = \frac{1}{7}$$

23.
Ecuación implícita:

$$0=\begin{vmatrix} x & 1 & 2\\ y & -1 & 1\\ z & 2 & 1\end{vmatrix}=x\begin{vmatrix} -1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}-y\begin{vmatrix} 1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}+z\begin{vmatrix} 1 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}=-3x+3y+3z\Leftrightarrow x-y-z=0$$

Ecuación paramétrica:

$$\begin{cases} x=\lambda+2\mu\\ y=-\lambda+\mu\\ z=2\lambda+\mu\end{cases}$$

Punto de intersección:

$$\begin{cases} x-y-z=0\\ x+y+z=0\end{cases}\Rightarrow y=-z\Rightarrow x-(-z)-z=0\Rightarrow x=0\Rightarrow(0:1:-1)$$

24.

b1)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1\\ 3 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\overset{\substack{F_2\to F_2-3F_1\\ F_3\to F_3-F_1}}{\Rightarrow}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1\\ 0 & 3 & -2\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow Rang=3$$

La única solución del sistema es (0,0,0) y por tanto se trata de tres rectas que se cortan dos a dos en puntos diferentes.

b2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & -3\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}\overset{\substack{F_2\to F_2-F_1\\ F_3\to F_3-F_1}}{\Rightarrow}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & -4\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}\overset{F_3\to 2F_3+F_1}{\Rightarrow}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & -4\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow Rang=2$$

El sistema tiene solución no trivial, luego las tres rectas tienen pasan por un punto común. El punto es

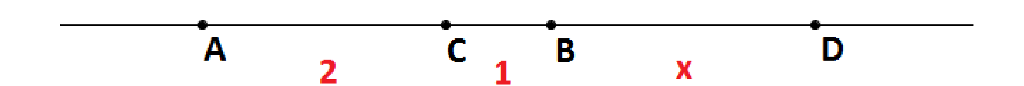
$$\left.\begin{array}{l} 2y-4z=0\Leftrightarrow y=2z\\ x+2z+z=0\Leftrightarrow x=-3z\end{array}\right\}\Rightarrow(-3:2:1)$$

b3)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\overset{F_2\to F_2-F_1}{\Rightarrow}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}\overset{F_3\to F_3-F_1}{\Rightarrow}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow Rang=3$$

La única solución del sistema es (0,0,0) y por tanto se trata de tres rectas que se cortan dos a dos en puntos diferentes.

25.



Por la caracterización de cuaterna armónica:

$$AC \cdot BD = AD \cdot CB \Leftrightarrow$$
$$2 \cdot x = (x+3)(1)$$
$$2x = x+3$$
$$x = 3$$

Fuente: youtube.com, Prof. Jorge Ayala.

26.
Por la caracterización de cuaterna armónica:

$$AM \cdot BN = AN \cdot MB \Leftrightarrow$$
$$15 \cdot (x-23) = x \cdot 8$$
$$15x - 345 = 8x$$
$$15x - 8x = 345$$
$$7x = 345$$
$$x = 345/7 \cong 49.28$$

Fuente: youtube.com, Prof. Jorge Ayala.

27.

Aplicamos el Teorema de la bisectriz interna y externa (6.3.6b):

$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{C''A}{C''B} = \frac{AC}{CB}$$

Luego $(A,B;C',C'') = \frac{AC' \cdot BC''}{BC' \cdot AC''} = \frac{AC'}{BC'} \cdot \frac{BC''}{AC''} = -\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BC''}{AC''} = -\frac{AC}{CB} \cdot \frac{CB}{AC} = -1$

28.
Sean π_1 y π_2 dos planos diferentes de P^3.
$\dim \pi_1 = \dim \pi_2 = \dim \mathrm{P}^3 - 1 = 2$
$\pi_1 \vee \pi_2 = P^3$, puesto que son diferentes, luego $\dim \pi_1 \vee \pi_2 = \dim P^3 = 3$
Aplicando la fórmula de Grassman:
$\dim \pi_1 \cap \pi_2 + \dim \pi_1 \vee \pi_2 = \dim \pi_1 + \dim \pi_2 \Rightarrow$
$\dim \pi_1 \cap \pi_2 = \dim \pi_1 + \dim \pi_2 - \dim \pi_1 \vee \pi_2 = 2 + 2 - 3 = 1$
Es decir, $\pi_1 \cap \pi_2$ es una recta.

Dada una variedad proyectiva L de un espacio proyectivo P^n, demostrar que si $\dim L = r$, entonces, para cualquier hiperplano H de P^n, o bien $L \subset H$ o $\dim(L \cap H) = r - 1$.

Supongamos que $L \not\subset H$. Luego $L \vee H = P^n$, y por tanto
$n = \dim P^n = \dim(L \vee H) = \dim L + \dim H - \dim(L \cap H) = r + n - 1 - \dim(L \cap H) \Rightarrow$
$\dim(L \cap H) = r - 1$

29.
$(x : y : z) \in [<(1,2,8),(-7,0,3)>] \Leftrightarrow (x, y, z) \in <(1,2,8),(-7,0,3)> \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow Rang\begin{pmatrix} x & 1 & -7 \\ y & 2 & 0 \\ z & 8 & 3 \end{pmatrix} = Rang\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 2 & 0 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} = 2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 1 & -7 \\ y & 2 & 0 \\ z & 8 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow 6x - 56y + 14z - 3y = 0$

$\Leftrightarrow 6x - 59y + 14z = 0$

30.
Dado que ambos referenciales ya están normalizados, pues (3,9,1)=(3,1,-3)+(-1,0,5)+(1,8,-1), podemos escribir

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ a_1^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

y de la misma forma completamos la matriz del cambio de referencia:

$$\begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 8 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

31.
$O_1 = (1 : 0 : 0)$

$O_2 = (0 : 1 : 0)$

$O_3 = (0 : 0 : 1)$

$A = (0 : 1 : 1)$

La recta O_1O_2 tiene por ecuación $x_3 = 0$
La recta O_1O_3 tiene por ecuación $x_2 = 0$
Sea M un punto genérico de la recta O_1O_3: $M = (a : 0 : b)$
La recta r tendrá entonces por ecuación:

$$0=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a & 0 & b \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix} x_1 - \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} x_3 = -bx_1 - ax_2 + ax_3 \Rightarrow$$

$$bx_1 + a(x_2 - x_3) = 0$$

Determinamos el punto N:

$$N = O_1O_2 \cap r : \begin{cases} x_3 = 0 \\ bx_1 + a(x_2 - x_3) = 0 \end{cases} \Rightarrow bx_1 + a\,x_2 = 0 \Rightarrow a\,x_2 = -bx_1$$

$$N = (a : -b : 0)$$

Determinamos la recta O_3N:

$$0=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a & -b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -b & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} x_1 - \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} a & -b \\ 0 & 0 \end{vmatrix} x_3 = -bx_1 - ax_2 = 0 \Rightarrow$$

$$a\,x_2 = -bx_2$$

Determinamos la recta O_1A:

$$0=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} x_1 - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} x_3 = -x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow$$

$$x_2 = x_3$$

Determinamos el punto P:

$$P = O_3N \cap O_1A : \begin{cases} a\,x_2 = -bx_2 \\ x_2 = x_3 \end{cases} \Rightarrow P = (-a : b : b)$$

Por último, determinamos la recta MP:

$$0=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a & 0 & b \\ -a & b & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & b \\ b & b \end{vmatrix} x_1 - \begin{vmatrix} a & b \\ -a & b \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} a & 0 \\ -a & b \end{vmatrix} x_3 \Leftrightarrow$$

$$-bx_1 + a(x_3 - 2x_2) = 0$$

Independientemente de los parámetros a y b, esta recta siempre pasa por el punto (0:1:2).

32.

Ecuación de la recta O_1A:

$$0=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} x_1 - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_3 \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix} x_3 = -a_3x_2 + a_2x_3 \Rightarrow a_2x_3 = a_3x_2$$

Ecuación de la recta O_2B:

$$0=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ b_1 & 0 & b_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b_3 \end{vmatrix}x_1-\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}x_2+\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}x_3=b_3x_1-b_1x_3 \Rightarrow b_1x_3=b_3x_1$$

Ecuación de la recta O_3C:

$$0=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ c_1 & c_2 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ c_2 & 0 \end{vmatrix}x_1-\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}x_2+\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}x_3=-c_2x_1-(-c_1)x_2 \Rightarrow c_2x_1=c_1x_2$$

Las tres rectas serán concurrentes si y solo si el sistema $\begin{cases} a_2x_3=a_3x_2 \\ b_1x_3=b_3x_1 \\ c_2x_1=c_1x_2 \end{cases}$ tiene solución:

$$\begin{cases} a_2x_3=a_3x_2 \\ b_1x_3=b_3x_1 \\ c_2x_1=c_1x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a_3x_2+a_2x_3=0 \\ -b_3x_1+b_1x_3=0 \\ c_2x_1-c_1x_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ -b_3 & 0 & b_1 \\ c_2 & -c_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ -b_3 & 0 & b_1 \\ c_2 & -c_1 & 0 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow -(-a_3)(-b_1c_2)+a_2(-b_3)(-c_1)=0$$

$$\Leftrightarrow b_1c_2a_3=a_2b_3c_1$$

$$\Leftrightarrow 1=\frac{a_2b_3c_1}{b_1c_2a_3}$$

33.

Sea P^2 el plano determinado por estos cuatro puntos. Podemos tomar como referencia $\{A,B,C;D\}$, pues los cuatro puntos son coplanarios y tres a tres no colineales.

En esta referencia:

$A=(1:0:0)$

$B=(0:1:0)$

$C=(0:0:1)$

$D=(1:1:1)$

Recta AD: $0=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow -\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow x_2=x_3$

Recta BC: $0=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow x_1=0$

Punto $AD \cap BC = (0:1:1)$

Recta AB: $0 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_3 = 0$

Recta CD: $0 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow -\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

Punto $AB \cap CD = (1:1:0)$

Recta AC: $0 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0$

Recta BD: $0 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_3$

Punto $AC \cap BD = (1:0:1)$

Los tres puntos no están alineados pues

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

34.
Sea r la recta que pasa por los cuatro puntos. Determinamos la referencia proyectiva asociada a los tres primeros puntos: (A,B;C)

$$(2,1,-3,3) = a(1,1,-1,1) + b(0,1,1,-1) \Rightarrow \begin{cases} 2 = a \\ 1 = a + b \\ -3 = -a + b \\ 3 = a - b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$$

Luego la base normalizada será {(2,2,-2,2),(0,-1,-1,1)}, y en esta base representamos el punto D:

$$(4,3,-5,5) = a(2,2,-2,2) + b(0,-1,-1,1) \Rightarrow \begin{cases} 4 = 2a \\ 3 = 2a - b \\ -5 = -2a - b \\ 5 = 2a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

Luego las coordenadas del punto D en la referencia (A,B;C) serán (2:1)
La razón doble de los cuatro puntos es igual a la coordenada absoluta del punto D en la referencia (A,B;C), por lo tanto $(ABCD)=\frac{2}{1}=2$.

35.

$$(ABCD)=\frac{-1-1}{-1-i}:\frac{-i-1}{-i-i}=\frac{-2(-2i)}{(-1-i)(-i-1)}=\frac{4i}{2i}=2$$

Sobre la recta proyectiva del cuerpo Z_3 encontrar la abscisa del punto X tal que
(-1 2 0 X) = 2

$$2=(-1\,2\,0\;X)=\frac{0-(-1)}{0-2}:\frac{x-(-1)}{x-2}\Leftrightarrow 2=\frac{1}{-2}:\frac{x+1}{x-2}=\frac{x-2}{-2(x+1)}\Leftrightarrow -4=\frac{x-2}{x+1}$$

(En Z_3 $-4=-1=2$)

$$2=\frac{x-2}{x+1}\Leftrightarrow 2(x+1)=x-2\Leftrightarrow 2x+2=x-2\Leftrightarrow x=-4=-1=2$$

36.

Normalizamos la referencia de la imagen:

$$(0,5)=a(2,-3)+b(1,1)\Rightarrow\begin{cases}0=2a+b\\5=-3a+b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\b=2\end{cases}$$

Luego
$f(1:0)=(-2:3)$, $f(0:1)=(2:2)$, $f(1:1)=(0:5)=(-2:3)+(2:2)$

y por tanto la matriz de la proyectividad es $\begin{pmatrix}-2&2\\3&2\end{pmatrix}$

Luego las coordenadas del punto $(7:21)$ serán $\begin{pmatrix}-2&2\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\21\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}28\\63\end{pmatrix}$

37.

$$\frac{1}{2}\frac{AP}{PM}=\frac{AP/PM}{2}=\frac{-\left(AP/MP\right)}{2}=\frac{-\left(AP/MP\right)}{2}=\frac{-\left(PA/PM\right)}{2}=\frac{-\left(PMA\right)}{2}$$

$$\frac{-\left(PMA\right)}{2}=\frac{-\left(PMA\right)}{\left(CMA\right)}\qquad\qquad (CMA)=\frac{CA}{CM}=2$$

$$\frac{-\left(PMA\right)}{\left(CMA\right)}=-\left(AMPC\right)$$

$-\left(AMPC\right)=-\left(ANQ\infty\right)$ Los puntos están en perspectiva por B

$$-\left(ANQ\infty\right)=-\left(QNA\right)=\frac{-QA}{QN}=\frac{AQ}{QN}$$

38.

a) Tomamos la referencia $\{A,B,C;D\}$ con D escogido para ser punto unidad, es decir, fuera del triángulo ABC.

Si $f=[\varphi]$, $A=\langle a\rangle$, $B=\langle b\rangle$, $C=\langle c\rangle$,

$$\left.\begin{array}{l} f(A)=A\Rightarrow \varphi(a)=\alpha\, a \\ f(B)=B\Rightarrow \varphi(b)=\beta\, b \\ f(C)=C\Rightarrow \varphi(c)=\delta\, c \end{array}\right\}\Rightarrow M=\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \delta \end{pmatrix} \quad \alpha,\beta,\delta\neq 0$$

b) Sea $Q=(q_1,q_2,q_3)\Rightarrow f(Q)=(\alpha q_1,\beta q_2,\delta q_3)$

Calculamos la recta $Qf(Q)$:

$$0=\begin{vmatrix} x & q_1 & \alpha\, q_1 \\ y & q_2 & \beta\, q_2 \\ z & q_3 & \delta\, q_3 \end{vmatrix}=x(q_2\delta\, q_3-q_3\beta\, q_2)-y(q_1\,\delta q_3-q_3\,\alpha q_1)+z(q_1\,\beta q_2-q_2\,\alpha q_1)=$$

$$=xq_2\,q_3(\delta-\beta)-yq_1\,q_3(\delta-\alpha)+zq_1\,q_2(\beta-\alpha)$$

$AB: z=0$

$$Qf(Q)\cap AB: \begin{array}{l} 0=xq_2\,q_3(\delta-\beta)-yq_1\,q_3(\delta-\alpha)\Rightarrow xq_2\,q_3(\delta-\beta)=yq_1\,q_3(\delta-\alpha)\Rightarrow \\ (q_1\,q_3(\delta-\alpha),q_2\,q_3(\delta-\beta),0) \end{array}$$

Puesto que $q_3\neq 0$ puesto que Q está fuera del triángulo, podemos dividir entre q_3 y obtener el punto $(q_1(\delta-\alpha),q_2(\delta-\beta),0)=\delta Q-f(Q)$

$AC: y=0$

$Qf(Q)\cap AC: 0=xq_2\,q_3(\delta-\beta)+zq_1\,q_2(\beta-\alpha)\Rightarrow(-q_1\,q_2(\beta-\alpha),0,q_2\,q_3(\delta-\beta))$

y puesto que $q_2\neq 0$ puesto que Q está fuera del triángulo, podemos dividir entre q_2 y obtener el punto $(-q_1(\beta-\alpha),0,q_3(\delta-\beta))=-\beta Q+f(Q)$

$$\left(Q,f(Q);Qf(Q)\cap AB,Qf(Q)\cap AC\right)=\frac{\begin{vmatrix} 1 & \delta \\ 0 & -1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 & -\beta \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -\beta \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 & \delta \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{(-1)\beta}{1\cdot(-\delta)}=\frac{\beta}{\delta}$$

no depende del punto Q. De la misma forma se desarrollan las otras dos razones dobles.

39.

Pasamos a forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Calculamos el polinomio característico:

$$0=\begin{vmatrix}2-x & 1 & -1\\ 0 & 2-x & -1\\ -3 & -2 & 3-x\end{vmatrix}=(2-x)\begin{vmatrix}2-x & -1\\ -2 & 3-x\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2-x & -1\end{vmatrix}=$$
$$=(2-x)\left[(2-x)(3-x)-(-2)(-1)\right]-3\left[1(-1)-(2-x)(-1)\right]=$$
$$=(2-x)\left(x^2-5x+4\right)-3(1-x)=(2-x)(x-1)(x-4)+3(x-1)=$$
$$=(x-1)\left[(2-x)(x-4)+3\right]=-(x-1)(x-1)(x-5)$$

El polinomio característico tiene dos soluciones: $x=5$ (simple) y $x=1$ (doble).

Encontramos el punto doble asociado al valor propio $x=5$:

$$5\begin{pmatrix}x_0\\ x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 2 & -1\\ -3 & -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\ x_1\\ x_2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}5x_0=2x_0+x_1-x_2\\ 5x_1=2x_1-x_2\\ 5x_2=-3x_0-2x_1+3x_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0=-3x_0+x_1-x_2\\ 0=-3x_1-x_2\\ 0=-3x_0-2x_1-2x_2\end{cases}$$

Haciendo $x_2=\lambda$

$0=-3x_1-\lambda\Rightarrow 3x_1=-\lambda\Rightarrow x_1=-1/3\lambda$

$0=-3x_0-1/3\lambda-\lambda\Rightarrow 3x_0=-4/3\lambda\Rightarrow x_0=-4/9\lambda$

Obtenemos el punto fijo $\left(-4/9\lambda,-1/3\lambda,\lambda\right)=\left(-4/9,-1/3,1\right)=\left(-4,-3,9\right)$.

Encontramos el punto doble asociado al valor propio $x=1$:

$$\begin{pmatrix}x_0\\ x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 2 & -1\\ -3 & -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\ x_1\\ x_2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_0=2x_0+x_1-x_2\\ x_1=2x_1-x_2\\ x_2=-3x_0-2x_1+3x_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0=x_0+x_1-x_2\\ 0=x_1-x_2\\ 0=-3x_0-2x_1+2x_2\end{cases}$$

Haciendo $x_2=\lambda$

$0=x_1-\lambda\Rightarrow x_1=\lambda$

$0=x_0+\lambda-\lambda\Rightarrow x_0=0$

Y el punto fijo asociado a este valor propio es $\left(0,\lambda,\lambda\right)=(0,1,1)$.

Para $x=1$, $Rang(M-1I)=Rang\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ -3 & -2 & 2\end{pmatrix}=2$, pues la tercera columna es proporcional a la segunda, y las dos primeras son linealmente independientes. Se trata pues de una <u>homografía con dos puntos dobles y dos rectas dobles</u>.

Las rectas dobles serán las correspondientes a los ρ tales que $Det((M^{-1})^T-\rho I)=0$.

$$M^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4 & -1 & 1\\ 3 & 3 & 2\\ 6 & 1 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow\left(M^{-1}\right)^T=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4 & 3 & 6\\ -1 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}4 & 3 & 6\\ -1 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}$$

$$Det((M^{-1})^T-\rho I)=\begin{vmatrix}4-\rho & 3 & 6\\ -1 & 3-\rho & 1\\ 1 & 2 & 4-\rho\end{vmatrix}=\rho^3+11\rho^2-35\rho+25=-(x-5)^2(x-1)$$

Las soluciones son $\rho=1$ (simple) y $\rho=5$ (doble).

Calculamos el vector propio (el punto doble) para $\rho=1$:

$$\begin{pmatrix}x_0\\x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&3&6\\-1&3&1\\1&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\x_1\\x_2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_0=4x_0+3x_1+6x_2\\x_1=-x_0+3x_1+x_2\\x_2=x_0+2x_1+4x_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0=3x_0+3x_1+6x_2\\0=-x_0+2x_1+x_2\\0=x_0+2x_1+3x_2\end{cases}$$

que tiene por solución: $(\lambda,\lambda,-\lambda)=(1,1,-1)$ que se corresponde con la recta doble $x_0+x_1-x_2=0$.

Calculamos el vector propio (el punto doble) para $\rho=5$:

$$\begin{pmatrix}5x_0\\5x_1\\5x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&3&6\\-1&3&1\\1&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\x_1\\x_2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}5x_0=4x_0+3x_1+6x_2\\5x_1=-x_0+3x_1+x_2\\5x_2=x_0+2x_1+4x_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0=-x_0+3x_1+6x_2\\0=-x_0-2x_1+x_2\\0=x_0+2x_1-x_2\end{cases}$$

que tiene por solución $(3\lambda,\lambda,\lambda)=(3,1,1)$ que se corresponde con la recta $3x_0+x_1+x_2=0$

Para encontrar la forma canónica, tomemos como referencia los puntos dobles (-4,-3,9) y (0,1,1) y otro punto sobre la recta $x_0+x_1-x_2=0$, por ejemplo (1,0,1). Entonces la matriz de cambio de base será

$$B=\begin{pmatrix}-4&0&1\\-3&1&0\\9&1&1\end{pmatrix},\text{ luego } B^{-1}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}-1&-1&1\\-3&13&3\\12&-4&4\end{pmatrix}$$

Y $B^{-1}MB=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}-1&-1&1\\-3&13&3\\12&-4&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&2&-1\\-3&-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4&0&1\\-3&1&0\\9&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$

40.

Pasamos a forma matricial:

$$\begin{pmatrix}x'_0\\x'_1\\x'_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2&1\\0&-2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

Su polinomio característico es:

$$Det(M-\lambda I)=\begin{vmatrix}-1-\lambda&2&1\\0&-2-\lambda&0\\0&0&-2-\lambda\end{vmatrix}=(-2-\lambda)^2(-1-\lambda)$$

Luego tiene asociados dos valores propios $\lambda=-1$ (simple) y $\lambda=-2$ (doble).

Para $\lambda=-2$:

$$Rang(M+2I)=Rang\begin{pmatrix}1&2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=1$$

Para $\lambda=-1$

$$Rang(M+1I)=Rang\begin{pmatrix}0&2&1\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=2$$

Se trata pues de una homografía con un punto doble y una recta de puntos dobles que no inciden (homología).

El centro de la homología coincide con el punto fijo asociado al valor propio simple. Lo determinamos:

$$\begin{pmatrix}-x_0\\-x_1\\-x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2&1\\0&-2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\x_1\\x_2\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}-x_0=-x_0+2x_1+x_2\\-x_1=-2x_1\\-x_2=-2x_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0=2x_1+x_2\\0=-1x_1\\0=-1x_2\end{cases}$$

El punto es $P=(1,0,0)$

Calculamos el eje de la homología, que es la recta de puntos dobles, que corresponderá al punto fijo de la función dual:

$$(M^{-1})^T=\begin{pmatrix}-1&0&0\\-1&-1/2&0\\-1/2&0&-1/2\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}-2&0&0\\-2&-1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}$$

$$0=Det((M^{-1})^T-\rho I)=\begin{vmatrix}-2-\rho&0&0\\-2&-1-\rho&0\\-1&0&-1-\rho\end{vmatrix}=(-1-\rho)^2(-2-\rho)$$

Con soluciones $\rho=-2$ (simple) y $\rho=-1$ (doble)

Para $\rho=-2$:

$$\begin{pmatrix}-2x_0\\-2x_1\\-2x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&0&0\\-2&-1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\x_1\\x_2\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}-2x_0=-2x_0\\-2x_1=-2x_0-x_1\\-2x_2=-x_0-x_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0=-2x_0+x_1\\0=-x_0+x_2\end{cases}$$

El punto es $(x_0,2x_0,x_0)=(1,2,1)$, que corresponde a la recta fija $x_0+2x_1+x_2=0$

Para $\rho=-1$:

$$\begin{pmatrix}-x_0\\-x_1\\-x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&0&0\\-2&-1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\x_1\\x_2\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}-x_0=-2x_0\\-x_1=-2x_0-x_1\\-x_2=-x_0-x_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0=-2x_0\\0=-x_0\end{cases}$$

Se obtiene un espacio $x_0=0$.

41.
Pasamos a forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Calculamos el polinomio característico asociado:

$$Det(M-\lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & -3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 = -(\lambda-1)^3$$

Luego existe un único autovalor $\lambda = 1$, triple, y por tanto un único punto fijo:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -2x_1 \\ x_1 = -x_2 \\ x_2 = -x_0 - 3x_1 + 3x_2 \end{cases} \Leftrightarrow x_0 = x_1 = x_2$$

El punto es $(1,1,1)$.

Existirá también una recta doble, que determinaremos también:

$$(M^{-1})^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$0 = Det((M^{-1})^T - \rho I) = \begin{vmatrix} 3-\rho & 1 & 0 \\ -3 & -\rho & 1 \\ -1 & 0 & -\rho \end{vmatrix} = -\rho^3 + 3\rho^2 - 3\rho + 1 = -(\rho-1)^3$$

Un único valor propio $\rho = 1$ triple. Su vector propio asociado será:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 3x_0 + x_1 \\ x_1 = -3x_0 + x_2 \\ x_2 = x_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 2x_0 + x_1 \\ 0 = -3x_0 - x_1 + x_2 \\ 0 = x_0 - x_2 \end{cases}$$

El vector propio será $(1,-2,1)$ que se corresponderá con la recta fija $x_0 - 2x_1 + x_2 = 0$.

Se observa que el punto fijo pertenece a la recta fija.

Calculamos el rango asociado al valor propio de M:

$$Rang(M - 1I) = Rang\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} = Rang\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = 2$$

Se trata pues de una homografía con un solo punto doble y una sola recta doble incidentes.

Tomando como nuevo sistema de referencia el formado por el punto fijo (1,1,1), otro punto de la recta doble, por ejemplo (0,1,2) y un tercer punto que no pertenece a la recta doble, por ejemplo (1,0,0), resulta la matriz de cambio de base:

$$B=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\1&2&0\end{pmatrix}\Rightarrow B^{-1}=\begin{pmatrix}0&2&-1\\0&-1&1\\1&-2&1\end{pmatrix}$$

$$B^{-1}MB=\begin{pmatrix}0&2&-1\\0&-1&1\\1&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&-3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\1&2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

42.

a) Pasamos a forma matricial:

$$\begin{pmatrix}x_0'\\x_1'\\x_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\\beta&0&-1\\1&-7&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\x_1\\x_1\end{pmatrix}$$

Si el punto es fijo, entonces

$$\begin{pmatrix}1\lambda\\0\lambda\\1\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\\beta&0&-1\\1&-7&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$ para cierto $\lambda\neq 0$, luego la segunda ecuación implica

$0=\beta-1\Rightarrow\beta=1$

b) La ecuación característica es:

$$0=\begin{vmatrix}-x&-1&1\\1&-x&-1\\1&-7&-x\end{vmatrix}=x^3+7x-6=-(x-2)(x-1)(x+3)$$

cuyas soluciones son $x=2$, $x=1$ y $x=-3$, las tres simples.

Calculamos los puntos fijos asociados:

Para $x=2$:

$$\begin{pmatrix}2x_0\\2x_1\\2x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&0&-1\\1&-7&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\x_1\\x_2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2x_0=-x_1+x_2\\2x_1=x_0-x_2\\2x_2=x_0-7x_1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0=-2x_0-x_1+x_2\\0=x_0-2x_1-x_2\\0=x_0-7x_1-2x_2\end{cases}$$

Luego el punto fijo es: $(3x_0,-x_0,5x_0)=(3,-1,5)=A$

De la misma forma, para $x=1$ obtenemos el punto fijo $B=(1,0,1)$, y para $x=-3$ obtenemos el punto fijo $C=(-1,2,5)$.

c) las rectas invariantes serán las rectas que pasan por cada pareja de puntos fijos: AB, AC y BC:

Recta AB: $0=\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow -x_0+2x_1+x_2=0$

Recta AC: $0=\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 3 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} \Leftrightarrow -3x_0-4x_1+x_2=0$

Recta BC: $0=\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} \Leftrightarrow x_0+3x_1-x_2=0$

d) Tomando como referencia los tres puntos fijos, tenemos

$$B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix} -2 & -6 & 2 \\ 15 & 20 & -5 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}MB=\frac{1}{10}\begin{pmatrix} -2 & -6 & 2 \\ 15 & 20 & -5 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -7 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

43.

Los puntos A,B,C,D están normalizados. Normalicemos los puntos B, C, D, A:

$$(0,0,1)=\mathrm{b}(0,1,0)+\mathrm{c}(1,0,0)+\mathrm{d}(1,1,1) \Leftrightarrow \begin{cases} 0=\mathrm{c}+\mathrm{d} \\ 0=\mathrm{b}+\mathrm{d} \\ 1=\mathrm{d} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{c}=-1 \\ \mathrm{b}=-1 \\ 1=\mathrm{d} \end{cases}$$

La tranformación que necesitamos es

$$\begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Calculamos sus elementos dobles.

Su ecuación carascterística es:

$$0=\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}=-\lambda^3+\lambda^2-\lambda+1=-(\lambda-1)(\lambda^2+1)$$

cuyas soluciones son $\lambda=1$ y $\lambda=\pm i$

Es una homografía con un solo punto doble y una sola recta doble no incidentes.

Para $\lambda=1$ calculamos el punto doble:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = x_0 - x_1 \\ x_1 = x_0 - x_2 \\ x_2 = x_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = -x_1 \\ 0 = x_0 - x_1 - x_2 \\ x_2 = x_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = x_1 \\ x_2 = x_0 \end{cases}$$

y el punto es $(x_0, 0, x_0) = (1,0,1)$.

Para calcular las rectas dobles estudiamos los autovalores y autovectores de $(M^{-1})^T$:

$$(M^{-1})^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Su ecuación característica es:

$$\left|(M^{-1})^T - \rho I\right| = \begin{vmatrix} -\rho & -1 & 0 \\ 0 & -\rho & -1 \\ 1 & 1 & 1-\rho \end{vmatrix} = -\rho^3 + \rho^2 - \rho + 1 = -(\rho - 1)(\rho^2 + 1)$$

cuyas soluciones son $\rho = 1$ y $\rho = \pm i$

Para $\rho = 1$ tenemos el autovector:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -x_1 \\ x_1 = -x_2 \\ x_2 = x_0 + x_1 + x_2 \end{cases}$$

Cuya solución és $(-x_1, x_1, -x_2) = (-1,1,-1) = (1,-1,1)$ que corresponde a la recta fija $x_0 - x_1 + x_2 = 0$.

44.
La ecuación será de la forma $Axx' + Bx' + Cx + D = 0$, luego

$$\begin{cases} A \cdot 3 \cdot (-1) + B \cdot (-1) + C \cdot 3 + D = 0 \\ A \cdot 0 \cdot 2 + B \cdot 2 + C0 + D = 0 \\ A \cdot (-1) \cdot 1 + B \cdot 1 + C(-1) + D = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3A - B + 3C + D = 0 \\ 2B + D = 0 \\ -A + B - C + D = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -a \\ c = 0 \\ d = 2a \end{cases}$$

Las soluciones de este sistema son de la forma $(A, -A, 0, 2A) = (1, -1, 0, 2)$, luego la ecuación implícita es

$$xx' - x' + 2 = 0$$

Los puntos dobles serán las soluciones de la ecuación $x^2 - x + 2 = 0$, es decir, $x = \frac{1 \pm \sqrt{7}i}{2}$. La ecuación no tiene soluciones reales, luego la homografía no tiene puntos dobles; se trata de una homografía elíptica.

45.
a) La ecuación será de la forma $Axx' + Bx' + Cx + D = 0$, luego

$$\begin{cases} A\cdot 0\cdot 1+B\cdot 0+C\cdot 1+D=0 \\ A\cdot 2\cdot(-2)+B\cdot 2+C(-2)+D=0 \\ A\cdot 0\cdot 1+B\cdot 1+C0+D=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C+D=0 \\ -4A+2B-2C+D=0 \\ B+D=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C=-D \\ B=-D \\ -4A+2(-D)-2(-D)+D=0 \Leftrightarrow -4A-2D+2D+D=0 \Leftrightarrow A=D/4 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (D/4,-D,-D,D)=(1,-4,-4,4)$

Luego la ecuación implícita será $xx'-4x'-4x+4=0$

b) Los puntos dobles son las soluciones de la ecuación $x^2-8x+4=0$, es decir $x=2(2\pm\sqrt{3})$

c) Los puntos límite son $(-B,A)=(4,1)$ y $(-C,A)=(4,1)$, que en este caso coinciden en el punto $x=4$.

46.

Sabemos que la ecuación implícita de esta involución será de la forma $Ax'x+B(x'+x)+D=0$ con $B^2-AD\neq 0$

Entonces los puntos dobles son aquellos que satisfacen la ecuación $Ax^2+2Bx+D=0$, luego

$$Ai^2+2Bi+D=0 \Leftrightarrow -A+2iB+D=0$$

$$A(-i)^2+2B(-i)+D=0 \Leftrightarrow -A-2iB+D=0$$

Restando las dos ecuaciones llegamos a $4iB=0 \Rightarrow B=0$, y sumándolas tenemos $-2A+2D=0 \Leftrightarrow -A+D=0 \Leftrightarrow D=A$.

Luego la ecuación será $Ax'x+A=0 \Leftrightarrow x'x+1=0$.

47.

Tomamos el punto $X_0=0$. Luego

$$5x'0+2x'-0+1=0 \Rightarrow 2x'+1=0 \Rightarrow X_1=-1/2$$

$$5x'(-1/2)+2x'-(-1/2)+1=0 \Rightarrow X_2=3$$

$$5x'(3)+2x'-(3)+1=0 \Rightarrow X_3=2/17$$

Entonces $f=g\circ h$, donde

$$\begin{array}{c} h:P_1(K)\to P_1(K) \\ 0\mapsto 3 \\ -1/2\mapsto -1/2 \\ 3\mapsto 0 \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{c} g:P_1(K)\to P_1(K) \\ 3\mapsto -1/2 \\ -1/2\mapsto 3 \\ 0\mapsto 2/17 \end{array}$$

Calculamos h: Ha de cumplir una ecuación del tipo $Ax'x+B(x'+x)+D=0$:

$$\begin{cases} A\cdot 3\cdot 0+B(3+0)+D=0 \\ A\cdot(-1/2)\cdot(-1/2)+B(-1/2-1/2)+D=0 \\ A\cdot 0\cdot 3+B(0+3)+D=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3B+D=0 \\ A/4-B+D=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (-16D,-D,3D) \Rightarrow (16,1,-3)$

Luego la involución será $16x'x+(x'+x)-3=0$

De la misma forma obtenemos la ecuación de la involución g: $27x'x+17(x'+x)-2=0$.

48.

Pasamos a forma matricial:

$xx'-x-x'-3=0 \Rightarrow$

$x'(x-1)-x-3=0 \Rightarrow$

$x'=\dfrac{x+3}{x-1} \Rightarrow$

$$\frac{x'_0}{x_1}=\frac{\frac{x_0}{x_1}+3}{\frac{x_0}{x_1}-1}=\frac{x_0+3x_1}{x_0-1x_1}$$

Luego la forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \Rightarrow M=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculamos su ecuación característica:

$0=DetM-\lambda I)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-4$, que tiene dos soluciones: $\lambda=2$ y $\lambda=-2$.

Por lo tanto es una proyectividad hiperbólica.

Para $\lambda=2$,

$$\begin{pmatrix} 2x_0 \\ 2x_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0=1x_0+3x_1 \\ 2x_1=1x_0-x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0=-x_0+3x_1 \\ 0=1x_0-3x_1 \end{cases} \Leftrightarrow x_0=3x_1$$

El punto fijo será $(3x_1,x_1)=(3,1)$.

Para $\lambda=-2$,

$$\begin{pmatrix} -2x_0 \\ -2x_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_0=1x_0+3x_1 \\ -2x_1=1x_0-x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0=3x_0+3x_1 \\ 0=1x_0+x_1 \end{cases} \Leftrightarrow x_0=-x_1$$

El punto fijo será $(-x_1,x_1)=(-1,1)$.

Tomando como referencia estos dos puntos, determinamos la matriz de cambio de referencia

$$B=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}MB = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

con forma canónica $x' = -2x$.

49.
Pasamos a forma matricial:

$$xx' + 3x - 2x' - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x'(x-2) + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x' = \frac{-3x+2}{x-2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x_0'}{x_1'} = \frac{-3\frac{x_0}{x_1}+2}{\frac{x_0}{x_1}-2} = \frac{-3x_0+2x_1}{x_0-2x_1} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Determinamos la ecuación característica asociada:

$$0 = DetM - \lambda I) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -4 \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

La matriz reducida será: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

Luego la ecuación canónica de la proyectividad es:

$$\begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{x_0'}{x_1'} = \frac{-1x_0}{-4x_1} \Rightarrow x' = \frac{1}{4}x$$

50.
Pasamos a forma matricial:

$$xx' + (2+\lambda)x + x' - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x'(x+1) = -(2+\lambda)x + 4 \Leftrightarrow$$

$$x' = \frac{-(2+\lambda)x+4}{x+1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x_0'}{x_1'} = \frac{-(2+\lambda)\frac{x_0}{x_1}+4}{\frac{x_0}{x_1}+1} = \frac{-(2+\lambda)x_0+4x_1}{x_0+x_1} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(2+\lambda) & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} -(2+\lambda) & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinamos la ecuación característica asociada:

$$0 = Det(M - xI) = \begin{vmatrix} -(2+\lambda)-x & 4 \\ 1 & 1-x \end{vmatrix} = (-(2+\lambda)-x)(1-x)-4 =$$

$$= (-2-\lambda-x)(1-x)-4 = -2-\lambda-x-(-2-\lambda-x)x-4 =$$

$$= -2-\lambda-x+2x+\lambda x+x^2-4 = x^2+(\lambda-1)x-(\lambda+6)$$

El discriminante de la ecuación es $(\lambda-1)^2-4\cdot 1(-1)(\lambda+6) = \lambda^2+2\lambda+25$ que es siempre positivo, luego siempre encontraremos dos autovalores reales diferentes, y por lo tanto todas las proyectividades serán hiperbólicas.

51.

a)

$$xx'-4x+2x'-3=0 \Leftrightarrow x'(x+2)-4x-3=0 \Leftrightarrow x' = \frac{4x+3}{x+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x'_0}{x'_1} = \frac{4\frac{x_0}{x_1}+3}{\frac{x_0}{x_1}+2} = \frac{4x_0+3x_1}{x_0+2x_1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

b)

Calculamos la ecuación característica asociada:

$$0 = Det(M-\lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(2-\lambda)-3 = \lambda^2-6\lambda+5 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = 5 \end{cases}$$

Para $\lambda = 1$ tenemos el siguiente punto fijo:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 4x_0+3x_1 \\ x_1 = x_0+2x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 3x_0+3x_1 \\ 0 = x_0+x_1 \end{cases} \Leftrightarrow x_0 = -x_1$$

Las soluciones son de la forma $(-x_1, x_1)$ luego el punto fijo es (-1,1), o en coordenadas no homogéneas el punto –1.

Para $\lambda = 5$ tenemos el siguiente punto fijo:

$$\begin{pmatrix} 5x_0 \\ 5x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x_0 = 4x_0+3x_1 \\ 5x_1 = x_0+2x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -x_0+3x_1 \\ 0 = x_0-3x_1 \end{cases} \Leftrightarrow x_0 = 3x_1$$

Las soluciones son de la forma $(3x_1, x_1)$ luego el punto fijo es (3,1), o en coordenadas no homogéneas el punto 3.

Nota: Este apartado puede realizarse sustituyendo $x' = x$ en la ecuación.

c)

Los puntos límite son la imagen y el origen del punto impropio (1,0)

$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, luego el primer punto límite es (4,1), en coordenadas homogéneas 4.

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&3\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\x_1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}1=4x_0+3x_1\\0=x_0+2x_1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0=3x_0+3x_1\\0=x_0+x_1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=2/5\\x_1=-1/5\end{cases}$$

El segundo punto límite es $\left(\frac{2}{5},\frac{-1}{5}\right)=(2,-1)$, o en coordenadas homogéneas –2.

52.
Sabemos que $f(r)$ es una recta. Sea $P'=f(r)\cap r$. Este punto existe y es único pues estamos en un plano proyectivo y son dos rectas diferentes.

Puesto que las colineaciones son biyecciones entre rectas (ver 2.3.3), sea $P\in r$ tal que $f(P)=P'$.
Está claro que $f(P)=P'\in r$.
Si hubieran dos puntos $P,Q\in r$ tales que $f(P),f(Q)\in r$, entonces $f(r)=r$, contradiciendo la hipótesis.

53.
Los puntos origen están normalizados, y los puntos imagen también:

$$(3,6,1)=a(3,1,-1)+b(-1,0,2)+c(1,5,0)\Leftrightarrow\begin{cases}3=3a-b+c\\6=a+5c\\1=-a+2b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=1\\c=1\end{cases}$$

Luego la matriz es

$$\begin{pmatrix}x'_0\\x'_1\\x'_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-1&1\\1&0&5\\-1&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\x_1\\x_2\end{pmatrix}\text{ o también }\begin{cases}x'_0=3x_0-x_1+x_2\\x'_1=x_0+5x_2\\x'_2=-x_0+2x_1\end{cases}$$

54.
a)

$$\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&1&1\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=0$$ luego los puntos A, B y C están alineados.

Y $D\in AB$ pues $(-2,1,1)=(-2)(1,0,0)+(0,1,1)$.
Otra forma de demostrarlo sería comprobando que

$$Rang\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\0&1&1\\-2&1&1\end{pmatrix}=2$$

b) Para calcular la razón doble [A,B;C,D] normalizamos la referencia $\{A,B;C\}$:
$(0,1,1)=a(1,0,0)+b(1,1,1)\Rightarrow a=-1,b=1$, y escribimos D como combinación de los dos nuevos puntos:

$(-2,1,1)=a(-1,0,0)+b(1,1,1)\Rightarrow a=3, b=1\Rightarrow [A,B,C,D]=\frac{3}{1}=3$

c) $[A',B;C,D]=-1\Leftrightarrow [D,C;B,A']=-1$

Normalizamos la referencia $\{D,C;B\}$

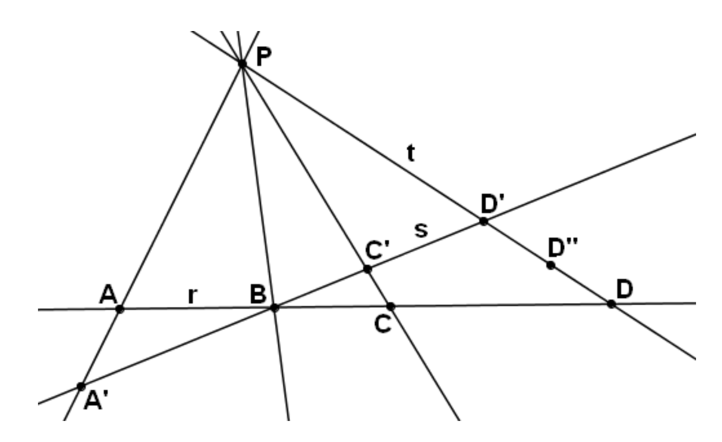
$(1,1,1)=a(-2,1,1)+b(0,1,1)\Rightarrow \begin{cases}1=-2a\\1=a+b\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}a=-1/2\\b=1-a=3/2\end{cases}$

$(1,1,1)=\frac{-1}{2}(-2,1,1)+\frac{3}{2}(0,1,1)$

$A'=(-1)\frac{-1}{2}(-2,1,1)+\frac{3}{2}(0,1,1)=(-1,2,2)$

55.

Marcamos un punto P fuera de r y una recta s que pasa por B



$r(A,B,C,D)\overset{P}{\wedge}s(A',B,C',D')\overset{C}{\wedge}t(D'',D,P,D')\overset{A'}{\wedge}r(C,D,A,B)$

56.

Sean r y s dos rectas diferentes. Sea $f:r\to s$ una perspectividad con centro P.
El punto de intersección $A=r\cap s$ es un punto invariante para la perspectividad, pues $A\in r\Rightarrow A\in PA, A\in s\Rightarrow A=PA\cap s$, por unicidad del punto de intersección de dos rectas proyectivas.

Supongamos que existe otro punto invariante $B\neq A$, es decir $B\in r$ y $PB\cap s=B$.
Entonces $A,B\in r, A\neq B\Rightarrow r=AB$, y de la misma forma $A,B\in s, A\neq B\Rightarrow s=AB$, luego $r=s$, contradiciendo la hipótesis de ser una perspectividad entre rectas diferentes.

57.

Sean $A=(0,1)$, B=(1,2) y C=(2,5). Normalizamos esta referencia poniendo B=(2,4).
En esta referencia tenemos A fijo y $B\mapsto C$, luego la matriz asociada a la homografía será de la forma:

$M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & b \end{pmatrix}$ para ciertos a y b reales.

Puesto que la homografía tiene un único punto fijo, la aplicación lineal tendrá un único autovector, y por tanto la ecuación característica tendrá una única solución

$$0 = Det(M - xI) = \begin{vmatrix} a-x & b \\ 0 & b-x \end{vmatrix} = (a-x)(b-x) = ab - ax - xb + x^2 = ab - (a+b)x + x^2$$

Esto se cumple cuando su discriminante es cero:

$$(a+b)^2 - 4ab = a^2 + b^2 + 2ab - 4ab = a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b$$

y por tanto la matriz M es

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & a \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora hacemos el cambio de referencia:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego

$$BMB^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Efectivamente,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Indicaciones

1. Utilizar el Teorema del punto medio del triángulo 6.2.1 y las fórmulas del área de los cuadriláteros.

2. Aplicar el Teorema de la bisectriz varias veces y añadir una recta al esquema.

3. Aplicar Teorema de la bisectriz dos veces.

4. Aplicar Teorema de Ptolomeo.

5. Buscar triángulos semejantes.

7. Buscar triángulos semejantes en el interior del triángulo.

8. Aplicar Teorema de la bisectriz y buscar triángulos semejantes.

9. Estudiar el cuadrilátero cíclico que hay en el interior del triángulo.

10. Seguirle la pista al ángulo $\angle A$, o mediante coordenadas baricéntricas.

11. Añadiendo una recta a la figura, o mediante coordenadas baricéntricas.

12. Aplicando Teorema de Stewart, Teorema del Coseno o mediante coordenadas baricéntricas.

13. Aplicar 8.2.3.

14. Aplicar Menelao.

16. Dividir el triángulo en cuatro áreas, y estudiar cada área por separado.

17. Aplicar Corolario 8.2.3.

18. Es directo mediante coordenadas baricéntricas.

19. Aplicar el Teorema del Cateto y su recíproco.

20. Aplicar Teorema de Pitágoras.

21. Aplicar 11.3.6

22. Desarrollar mediante coordenadas baricéntricas.

Bibliografía.

Descarga la versión más actualizada del libro de teoría en
www.toomates.net/biblioteca/GeometriaAxiomatica.pdf

[Prob1] Problemas de Geometría Vol. 1
www.toomates.net/biblioteca/ProblemasGeometria1.pdf

[Prob2] Problemas de Geometría Vol. 2
www.toomates.net/biblioteca/ProblemasGeometria2.pdf